

Diferencial

João Nuno Tavares*, Ângela Geraldo †

* Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

† CMUP/ Universidade do Porto

CITAÇÃO

Tavares, J. N., Geraldo, A. (2018) Diferencial, *Rev. Ciência Elem.*, V6(01):088. doi.org/10.24927/rce2018.088

EDITOR

José Ferreira Gomes
Universidade do Porto

RECEBIDO EM

25 de novembro de 2009

ACEITE EM

14 janeiro de 2010

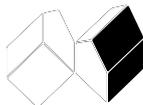
PUBLICADO EM

31 de março de 2018

COPYRIGHT

© Casa das Ciências 2021.
Este artigo é de acesso livre, distribuído sob licença Creative Commons com a designação [CC-BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/), que permite a utilização e a partilha para fins não comerciais, desde que citado o autor e a fonte original do artigo.

rce.casadasciencias.org



Dada uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \llcorner$, suponha que existe a derivada de f num ponto a , interior ao domínio de f . Considere os pontos $A(a, f(a))$ e $B(a+h, f(a+h))$ e, com $h \neq 0$, ambos sobre o gráfico de f , e a recta que os une.

Qual a equação cartesiana desta recta?

Como se sabe da geometria analítica plana, a equação da recta que une os pontos A e B é:

$$y - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} (x - a)$$

ou:

$$y = f(a) + \Delta_a f(h) (x - a)$$

Portanto o declive desta recta, isto é, a tangente do ângulo positivo que esta recta faz com a parte positiva do eixo dos xx , é igual à taxa média de variação de f em a .

Qual a posição limite desta recta quando $h \rightarrow 0$?

Quando $h \rightarrow 0$ a taxa média de variação de f em a , $\Delta_a f$, converge para a taxa instantânea de variação de f em a , isto é, converge para a derivada $f'(a)$ de f em a (supondo que esta existe).

Portanto a recta que une A e B tem uma posição limite que não é mais do que a recta tangente ao gráfico de f no ponto $A=(a, f(a))$. A respectiva equação é obtida a partir da equação anterior em , fazendo $h \rightarrow 0$:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

O declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto $A=(a, f(a))$, é pois igual à derivada $f'(a)$ de f em a .

Considere ainda os pontos seguintes:

$B=(a+h, f(a+h))$, no gráfico de f e $B'=(a+h, f(a) + f'(a)h)$, na recta tangente ao gráfico de f no ponto $A(a, f(a))$

A diferença das ordenadas destes dois pontos é igual a:

$$f(a+h) - [f(a) + f'(a)h]$$

e esta diferença é cada vez mais pequena quanto mais próximo de 0 estiver o "acréscimo" h . Neste sentido podemos pois dizer que o valor exacto $f(a+h)$ é aproximadamente igual a $f(a) + f'(a)h$, sendo esta aproximação cada vez mais precisa quanto mais pequeno é o valor de h :

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$$

Mais concretamente: se definirmos o erro $e(a;h)$ através da diferença:

$$e(a;h) \doteq f(a+h) - [f(a) + f'(a)h]$$

podemos dizer que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e(a;h)}{h} = 0$$

Diz-se então que o erro $e(a;h)$ é um infinitésimo de ordem superior a h .

A diferencial da função f no ponto a , é a função $df_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada acréscimo $h \in \mathbb{R}$ associa o valor $df_a \doteq f'(a) \cdot h$. É pois uma função linear em h - de facto a função linear que melhor aproxima f em a , no sentido em que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(a+h) - f(a)) - df_a(h)}{h} = 0$$

que não é mais do que a versão formal do que se disse antes, e que se presta a generalização.

