

—

O oscilador harmónico

CITAÇÃO

Lage, E. (2019)
O oscilador harmónico,
Rev. Ciência Elem., V7(02):033
doi.org/10.24927/rce2019.033

EDITOR

José Ferreira Gomes,
Universidade do Porto

EDITOR CONVIDADO

Paulo Fonseca,
Universidade de Lisboa

RECEBIDO EM

05 de junho de 2019

ACEITE EM

05 de junho de 2019

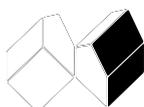
PUBLICADO EM

21 de junho de 2019

COPYRIGHT

© Casa das Ciências 2019.
Este artigo é de acesso livre,
distribuído sob licença Creative
Commons com a designação
[CC-BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/), que permite
a utilização e a partilha para fins
não comerciais, desde que citado
o autor e a fonte original do artigo.

rce.casadasciencias.org



Eduardo Lage
Universidade do Porto
ejslage@gmail.com

O oscilador harmónico está omnipresente em Física porque é um modelo simples para fenómenos simplesmente periódicos. Aqui é estudado como objeto mecânico, o que permitirá estender muitas dos resultados ao eletromagnetismo, teoria da elasticidade, dinâmica de fluidos e, mais genericamente, ao estudo de ondas.

O oscilador harmónico é o dispositivo mais simples capaz de exibir um fenómeno periódico, ainda mais simples que um pêndulo, pois que este àquele se reduz para pequenas amplitudes de oscilação. Experimentalmente, é fácil construir um oscilador: uma mola suspensa verticalmente, presa no extremo superior e tendo uma pequena massa agarrada à extremidade inferior, como se exibe na FIGURA 1. Esticando a mola, aquela massa entra em oscilações periódicas tornando possível estudar e medir muitas das propriedades que, aqui, serão apresentadas.

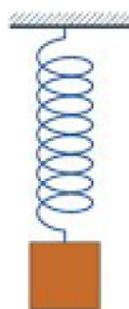


FIGURA 1. Oscilador harmónico: uma massa suspensa por uma mola.

Mas o oscilador harmónico é, também, um modelo simples para a descrição de muitos fenómenos em Física. Numa molécula diatómica, por exemplo, os átomos interagem através de um potencial que apresenta um mínimo (ver FIGURA 1 em “Equação de estado de Van der Waals”), pelo que, para energias ligeiramente superiores ao mínimo, a molécula comporta-se como um oscilador harmónico. E mesmo uma molécula poliatómica pode ser modelizada como uma coleção de osciladores harmónicos, designados por modos normais de vibração, quando a energia mecânica da molécula, soma das

energias cinéticas dos seus átomos com as energias de interação entre os átomos, se situa próxima do seu mínimo. O mesmo se passa num sólido que, para os efeitos aqui descritos, pode ser visualizado como uma molécula gigante. Um outro exemplo é um circuito LC, uma bobina e um condensador eletricamente conectados: o condensador descarrega carga e a consequente corrente elétrica induz uma f.e.m. na bobina, originando, assim, uma oscilação harmónica da carga e da corrente, facilmente mensuráveis por um voltímetro e um amperímetro, respetivamente. Outros exemplos surgem do comportamento elástico de materiais: uma barra horizontal, encastrada numa extremidade, apresentará oscilações harmónicas quando posta a vibrar verticalmente; um fio metálico, suspenso na vertical, também oscilará harmonicamente quando é torcido por aplicação de um momento na sua base inferior; e o mesmo fio, preso nas suas extremidades e mantido tenso, é sede de oscilações que se propagam (ver "Campos").

Estudemos, agora, o oscilador harmónico, considerando, apenas, o caso unidimensional que servirá para apresentar os conceitos e resultados mais fundamentais. Designemos por $x = 0$ a posição de equilíbrio do oscilador; afastada desta origem, a massa m é atuada pela força $-kx$, onde o sinal exhibe claramente que a massa é sempre puxada para a origem, quer quando a mola é esticada ($x > 0$), quer quando é comprimida ($x < 0$). A constante k é conhecida por constante da mola ou, mais geralmente, do oscilador. Se além desta força, designada por harmónica, existir uma força $f(t)$ externamente aplicada ao oscilador, a equação de movimento fica:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + f(t) \quad (1)$$

Trata-se de uma equação linear pelo que é válido o princípio da sobreposição: a soma de soluções é, ainda, uma solução. Assim, podemos estudar separadamente vários casos de interesse. Mais adiante, acrescentaremos o efeito do atrito (de Stokes), originando amortecimento, mas mantendo a linearidade da equação.

Na ausência de forças externas ($f = 0$), a solução da eq. (1) exprime-se, simplesmente, à custa de funções trigonométricas:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad \rightarrow \quad x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad (2)$$

onde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ é a frequência (angular) própria do oscilador. As constantes A e B são determinadas pelas condições iniciais: designando por x_0 e v_0 , respetivamente, a posição e velocidade iniciais, obtem-se:

$$\begin{aligned} x_0 &\equiv x(0) = A \\ v_0 &\equiv \dot{x}(0) = \omega_0 B \end{aligned}$$

Este é o movimento natural do oscilador, i.e., não sujeito a ações externas. Consideremos, agora, o efeito de forças externas. Para isso, torna-se muito mais simples e útil estudarmos o complexo $z(t) \equiv x(t) + i \frac{v(t)}{\omega_0}$. Se conhecermos $z(t)$, então a sua parte real é a posição atual $x(t)$ e da sua parte imaginária deduzimos a velocidade $v(t)$ do oscilador. Ora:

$$\frac{dz}{dt} = v(t) + \frac{i}{\omega_0} \frac{dv}{dt} = v(t) + \frac{i}{m\omega_0} (-kx + f(t))$$

onde empregamos a eq. (1). Substituindo $k = m\omega_0^2$, encontramos:

$$\frac{dz}{dt} = v(t) - i\omega_0 z(t) + \frac{i}{m\omega_0} f(t) = -i\omega_0 z(t) + \frac{i}{m\omega_0} f(t)$$

Isto é:

$$\frac{dz}{dt} + i\omega_0 z(t) = \frac{i}{m\omega_0} f(t) \quad (3)$$

Esta equação é linear, pelo que se aplica o princípio da sobreposição. A solução da equação homogénea é imediata:

$$\frac{dz}{dt} + i\omega_0 z(t) = 0 \quad \rightarrow \quad z(t) = z_0 e^{-i\omega_0 t}$$

onde z_0 é uma constante (complexa). Esta solução é o movimento natural, atrás analisado. Para, agora, encontrarmos uma solução particular da eq. (3), basta considerar $z(t) = w(t) e^{-i\omega_0 t}$. Substituindo na eq. (3), obtemos:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{i}{m\omega_0} e^{i\omega_0 t} f(t) \quad \rightarrow \quad w(t) = z_0 + \frac{i}{m\omega_0} \int_0^t dt' e^{i\omega_0 t'} f(t')$$

Assim, a solução geral da eq. (3) escreve-se:

$$z(t) = z_0 e^{-i\omega_0 t} + \frac{i}{m\omega_0} \int_0^t dt' e^{i\omega_0(t-t')} f(t') \quad (4)$$

O complexo z_0 é inteiramente determinado pelas condições iniciais:

$$z_0 = z(0) = x(0) + \frac{i}{\omega_0} v(0)$$

No que se segue, suporemos $z_0 = 0$, concentrando-nos, pois, apenas no efeito da força aplicada.

- a. Começemos por considerar o caso da força exterior constante (f_0), aplicada no instante inicial – é designada por força súbita. A solução da eq. (4) é:

$$z(t) = \frac{if_0}{m\omega_0} \int_0^t dt' e^{i\omega_0(t-t')} = \frac{f_0}{m\omega_0^2} (1 - e^{-i\omega_0 t})$$

Assim:

$$x(t) = \text{Re}[z(t)] = \frac{f_0}{m\omega_0^2} (1 - \cos(\omega_0 t))$$

$$v(t) = \text{Im}[z(t)] = \frac{f_0}{m\omega_0} \text{sen}(\omega_0 t)$$

Oscilador desloca-se harmonicamente entre a origem e a máxima amplitude $x = \frac{2f_0}{m\omega_0^2} = \frac{2f}{k}$

- b. Um segundo caso de interesse consiste em admitir que a força externa cresce muito lentamente até atingir o valor limite f_0 - é designada por força adiabática. Uma expressão analítica para tal força é $f(t) = f_0(1 - e^{-\varepsilon t})$, onde se considera $\varepsilon \rightarrow 0$ no fim dos cálculos, pelo que o tempo para a força atingir o seu valor limite é da ordem de $\frac{1}{\varepsilon} \rightarrow \infty$. Inserindo na eq. (4), obtemos:

$$z(t) = \frac{if_0}{m\omega_0} \int_0^t dt' e^{i\omega_0(t-t')} (1 - e^{-\varepsilon t'}) = \frac{if_0}{m\omega_0} \left\{ \left[\frac{1}{i\omega_0} - \frac{1}{i\omega_0 - \varepsilon} \right] [1 - e^{i\omega_0 t}] + \frac{1 - e^{-\varepsilon t}}{i\omega_0 - \varepsilon} \right\}$$

Tomando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, vem:

$$z(t) = \frac{f_0}{m\omega_0^2} = \frac{f_0}{k}$$

Vemos, assim, que a força adiabática reproduz a ideia de se manter, praticamente, o oscilador sempre em equilíbrio, levando-o até à posição final desejada, $x = Re[z(t)] = \frac{f_0}{k}$, com velocidade nula, $v(t) = Im[z(t)] = 0$. Deste modo, o trabalho realizado pela força adiabática aparece como energia potencial elástica, $V = \frac{1}{2}kx^2$, sendo imediato verificar que a energia mecânica $E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$ se conserva na ausência de forças exteriores.

- c. Um terceiro exemplo considera a resposta do oscilador a uma força exterior-periódica, i.e., $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$. Por resposta, entende-se a solução particular da eq. (3), sendo fácil verificar que tal solução é:

$$x(t) = \frac{f_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t) \quad (5)$$

Este importante resultado aparece em muitos domínios da Física, por exemplo na resposta de um dipólo elétrico a um campo elétrico aplicado; neste contexto, a eq. (5) fornece, diretamente, a suscetibilidade elétrica. Não escapará ao leitor que esta solução apresenta uma divergência quando a frequência da força aplicada (ω) iguala a frequência própria (ω_0) do oscilador, situação conhecida por ressonância. Podemos ver o que se passa regressando à eq. (4) para obter a resposta à força $f(t) = f_0 \cos(\omega_0 t)$. Assim:

$$z(t) = \frac{if_0}{2m\omega_0} \int_0^t dt' e^{i\omega_0(t-t')} (e^{i\omega_0 t'} + e^{-i\omega_0 t'}) = \frac{f_0}{2m\omega_0} \left(i \frac{\text{sen}(\omega_0 t)}{\omega_0} + t \cos(\omega_0 t) \right)$$

Assim:

$$x(t) = \frac{f_0}{2m\omega_0} t \text{sen}(\omega_0 t)$$

$$v(t) = \frac{f_0}{2m\omega_0} (\text{sen}(\omega_0 t) + t \cos(\omega_0 t))$$

Na ressonância, posição e velocidade cresceriam sem limitações.

Na prática, esta divergência não ocorre porque não podemos ignorar efeitos dissipativos tais como uma força de Stokes no meio viscoso onde o oscilador se move. Tal obriga-nos a acrescentar esta força ao 2º membro da eq. (1), que escreveremos sob a forma $-m\gamma v$, obtendo-se¹:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m} \quad (6)$$

¹ Esta equação é formalmente idêntica à de um circuito RLC, com a carga do condensador a desempenhar o papel da posição x . O circuito pode, então, considerar-se um computador analógico para o oscilador amortecido.

Procuramos a solução particular para $f(t) = f_0 \cos(\omega t) = \text{Re}[f_0 e^{i\omega t}]$, a qual terá a forma $x(t) = \text{Re}[a(\omega) e^{i\omega t}]$. Obtemos:

$$a(\omega) = \frac{f_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \quad (7)$$

Esta resposta não é mais divergente na ressonância; ela origina uma suscetibilidade complexa nos materiais dielétricos, por exemplo. A FIGURA 2 mostra as partes real e imaginária de $\alpha(y) \equiv \frac{m\omega_0^2}{f_0} a(\omega)$, com $y \equiv \frac{\omega}{\omega_0}$, para fraco amortecimento, $\frac{\gamma}{\omega_0} = 0.1$. São evidentes os picos acentuados da parte imaginária na ressonância. A figura seguinte exhibe as mesmas grandezas na situação de forte amortecimento, $\frac{\gamma}{\omega_0} = 10$.

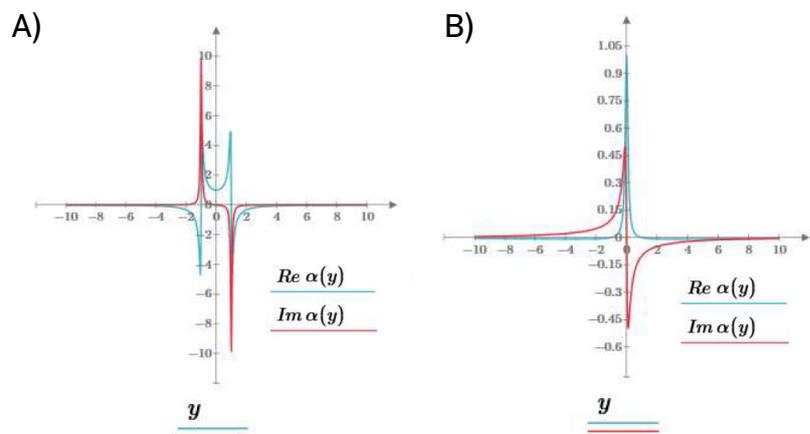


FIGURA 2. A) Partes real e imaginária de $\alpha(y)$ para fraco amortecimento. B) para forte amortecimento.

Podemos ver mais claramente a relação entre amortecimento e dissipação da energia fornecida pela força aplicada, analisando como varia a energia mecânica, através escrita, ao longo do tempo. Tem-se:

$$\frac{dE}{dt} = m v \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x \right)$$

Usando, agora, a eq. (6), obtemos:

$$\frac{dE}{dt} = f(t) v(t) - \gamma m v(t)^2$$

Efetuemmos a média desta equação sobre um período da força aplicada. A média do 1º membro é nula, porque posição e velocidade do oscilador regressam aos mesmos respectivos valores ao fim de um ciclo. Deste modo, a média da potência da força é igual à energia dissipada, i.e., $\langle f(t) v(t) \rangle = \gamma m \langle (v(t))^2 \rangle$.

Ora,

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \text{Re}[i\omega a(\omega) e^{i\omega t}] = \omega [\text{Re}[a(\omega)] \text{sen}(\omega t) + \text{Im}[a(\omega)] \text{cos}(\omega t)]$$

$$\text{pelo que } \langle f(t) v(t) \rangle = -\frac{f_0 \omega}{2} \text{Im}[a(\omega)] = \frac{f_0^2}{2m} \frac{\gamma \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \geq 0.$$

Dissipação e parte imaginária da resposta (suscetibilidade) estão, pois, intimamente re-

lacionadas.

Por último, podemos analisar o comportamento do oscilador, livre de forças externas, mas sujeito a dissipação, i.e., procurar as soluções da eq. (6) com 2º membro nulo.

Não são necessários cálculos adicionais: se existem soluções com $f_0 = 0$, então, observando a eq. (7), também deverá ser nulo o denominador no 2º membro desta equação, obtendo-se, pois, as frequências naturais do oscilador:

$$\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\omega_{\pm}}{\omega_0} = \frac{i\gamma}{2\omega_0} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{2\omega_0}\right)^2}$$

Assim, $x(t) = Re [A_+ e^{i\omega_+ t} + A_- e^{i\omega_- t}]$ com as constantes A_{\pm} determinadas pelas condições iniciais. Para fraco amortecimento, $\frac{\gamma}{\omega_0} \ll 1$, obtém-se $\frac{\omega_{\pm}}{\omega_0} = \frac{i\gamma}{2\omega_0} \pm 1$ que, substituídos em $x(t)$, originam $x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} Re [A_+ e^{i\omega_0 t} + A_- e^{i\omega_0 t}]$: as oscilações, têm a frequência própria, mas amortecem para 0, como se mostra na FIGURA 3.

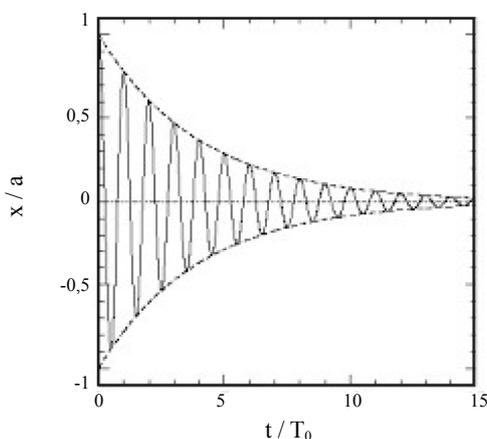


FIGURA 3. Oscilação amortecida.

Para forte amortecimento, $\frac{\gamma}{\omega_0} \gg 1$, não há qualquer oscilação: $\omega_+ \simeq i\gamma$ e $\omega_- \simeq \frac{i\omega_0^2}{\gamma}$, $x(t) = Re [A_+ e^{-\gamma t} + A_- e^{-\frac{\omega_0^2}{\gamma} t}] \xrightarrow{t \gg \frac{1}{\gamma}} Re [A_- e^{-\frac{\omega_0^2}{\gamma} t}]$. A transição de amortecimento fraco para amortecimento forte dá-se para $\gamma = 2\omega_0$ — é o amortecimento crítico. Neste $x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} [x_0 + (v_0 + \frac{\gamma x_0}{2})t]$, sendo este o mais rápido decaimento, para a origem, do oscilador, nas mesmas condições iniciais.

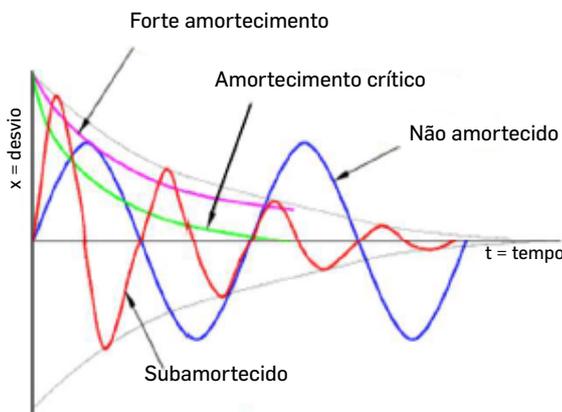


FIGURA 4. Todos os regimes dos osciladores livres.

A FIGURA 4 resume todos os comportamentos do oscilador livre.

REFERÊNCIAS

¹ FEYNMAN, R.P. *et al. The Feynman Lectures on Physics*. San Francisco: Pearson/Addison-Wesley, Vol. 1, section 12-5, 2006. ISBN 0-8053-9049-9

² GOLDSTEIN, H. *et al. Classical Mechanics*, Addison Wesley 3ª edição, 2001.

³ KIBBLE, T. W. B. & BERKSHIRE, F. H. , *Classical Mechanics*, 1966.