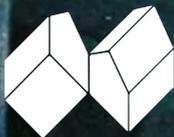


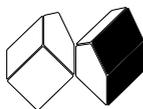
V11/03

REVISTA DE CIÊNCIA ELEMENTAR
CASA DAS CIÊNCIAS

SETEMBRO 2023



REVISTA DE CIÊNCIA ELEMENTAR



FICHA TÉCNICA

Rev. *Ciência Elem.*, V11(03)

Publicação trimestral
da Casa das Ciências

ISSN 2183-9697 (versão impressa)

ISSN 2183-1270 (versão online)

rce.casadasciencias.org

DEPÓSITO LEGAL

425200/17

COORDENAÇÃO EDITORIAL

Alexandra Coelho

DESIGN

Rui Mendonça

PAGINAÇÃO

Raul Seabra

IMAGEM NA CAPA

Swinging

Wassily Kandinsky

© Todo o material publicado nesta revista pode ser reutilizado para fins não comerciais, desde que a fonte seja citada.



PROPRIETÁRIO

Casa das Ciências/ICETA

Faculdade de Ciências,

Universidade do Porto

Rua do Campo Alegre, 687

4169-007 Porto

rce@casadasciencias.org

CORPO EDITORIAL DA REVISTA DE CIÊNCIA ELEMENTAR

EDITOR

João Nuno Tavares (UNIVERSIDADE DO PORTO)

CONSELHO EDITORIAL

Alexandre Lopes Magalhães (UNIVERSIDADE DO PORTO)

Jorge Manuel Canhoto (UNIVERSIDADE DE COIMBRA)

Paulo Ribeiro-Claro (UNIVERSIDADE DE AVEIRO)

José Cidade Mourão (INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO)

Rute Coimbra (UNIVERSIDADE DE AVEIRO)

Sónia Gouveia (UNIVERSIDADE DE AVEIRO)

José Francisco Rodrigues (UNIVERSIDADE DE LISBOA)

PRODUÇÃO E SECRETARIADO

Alexandra Coelho

Guilherme Monteiro

Liliana Freitas

Raul Seabra

NORMAS DE PUBLICAÇÃO NA RCE

A Revista de Ciência Elementar dirige-se a um público alargado de professores do ensino básico e secundário, aos estudantes de todos os níveis de ensino e a todos aqueles que se interessam pela Ciência. Discutirá conceitos numa linguagem elementar, mas sempre com um rigor superior.

INFORMAÇÃO PARA AUTORES E REVISORES

Convidam-se todos os professores e investigadores a apresentarem os conceitos básicos do seu labor diário numa linguagem que a generalidade da população possa ler e compreender.

Para mais informação sobre o processo de submissão de artigos, consulte a página da revista em rce.casadasciencias.org



**CASA DAS
CIÊNCIAS**

EDULOG · FUNDAÇÃO BELMIRO DE AZEVEDO

SETEMBRO 2023

V11/03

ÍNDICE

- 02 AGENDA
- 03 NOTÍCIAS
- EDITORIAL
- 05 **Sobre a situação atual da Casa das Ciências.**
João Nuno Tavares
- ARTIGOS
- 07 **As equações de Fresnel.**
Eduardo Lage
- 11 **Mutações.**
António Amorim
- 16 **Equações cúbicas e números complexos.**
José Carlos Santos
- 22 **Sol, sombra, bússolas solares.**
Suzana Nápoles
- 27 **Alótropos do carbono.**
André Terra, Alexandre Magalhães
- 33 **Nanomateriais híbridos de ouro/sílica.**
Fábio Martins *et al.*
- 38 **Paradoxos.**
João Nuno Tavares
- 38 **Rios temporários.**
Verónica Ferreira
- AOS OLHOS DA CIÊNCIA
- 43 **Do istmo do Panamá à península da Flórida**
Luís Vítor Duarte
- IMAGEM EM DESTAQUE
- 48 ***Quantum Entanglement.***
João Nuno Tavares

07/07
a 10/07 (2024)

IX Internacional da Casa das Ciências

Depois do sucesso do VIII Encontro, repetiremos a fórmula e o local!

Vamos regressar à Universidade de Aveiro, entre os dias 7 e 10 de julho de 2024 para os habituais dias de formação.

Estamos a trabalhar no programa que terá como tema aglutinador *Qual o impacto da Inteligência Artificial na Educação? Vantagens e desvantagens.*

Esteja atento! Contamos abrir inscrições muito em breve!

UNIVERSIDADE DE AVEIRO

23/09 (2023 | 24)

Pequenos naturalistas

O MHNC-UP lançou um novo programa educativo, o [Pequeno Naturalistas](#), que oferece atividades para crianças e jovens entre os 5 e os 15 anos.

Tem três ciclos anuais: [Colecionar o Mundo](#), [Dar a conhecer o Mundo](#) (estes dois em formato de academia, com sessões regulares ao longo do ano) e o [Explorar o Mundo](#).

Contactando diretamente com as peças e espaços do Museu e com a ajuda dos elementos da equipa, os participantes vão explorar a natureza e a cultura através de uma série de atividades que replicam o trabalho de curadoria, conservação, investigação e comunicação que todos os dias se realiza num museu de história natural e ciência.

Para mais informações acerca destes programas, consulte o site do [MHNC-UP](#).

UNIVERSIDADE DO PORTO, MUSEU DE HISTÓRIA NATURAL E DA CIÊNCIA

05/09
a 07/09 (2024)

ECRICE 2024

16.^a Conferência Europeia sobre Investigação em Educação Química

Com o tema *Educação Química para o Desenvolvimento Sustentável: Capacitando Comunidades Educacionais*, esta conferência sobre investigação em Educação Química, reconhecida pela EuChemS, pretende divulgar novas pesquisas e desenvolvimentos sobre esta temática. É importante saber como os alunos adquirem conhecimentos, como facilitar essa aquisição e desencadeá-la. É relevante examinar diferentes ambientes de aprendizagem, novas ferramentas educacionais e novas formas pelas quais a neuroeducação, a tecnologia e a inteligência artificial podem ser integradas na Educação Química e promover o envolvimento dos alunos no processo de aprendizagem.

Mais informações [aqui](#).

CAMPUS DA CAPARICA, LISBOA



Pedras parideiras em Arouca. Fenómeno único no mundo.



FIGURA 1. Pedra parideira e parida. (Wikipedia)

Este fenómeno, único no mundo, acontece na aldeia da Castanheira, em pleno planalto da Serra da Freita, no concelho de Arouca e é um dos geossítios mais emblemáticos do *Arouca Geopark*. Do ponto de vista geológico, a rocha designa-se “granito nodular da Castanheira” e estende-se por uma área de cerca de 1 km². Por ação da erosão, alguns nódulos libertam-se da “pedra-mãe” e acumulam-se no solo, deixando no granito uma cavidade. É por isso que os habitantes da aldeia da Castanheira chamaram a esta rocha [Pedra Parideira](#), por ser “a pedra que pare pedra”. Este fenómeno foi descrito pela primeira vez em 1751, pelo Padre Luiz Cardoso, no *Dicionário Geográfico*. Até ao momento, não há evidências científicas da existência, noutra parte do mundo, de outra rocha magmática intrusiva com as mesmas características das *Pedras Parideiras*.

Ondas de calor de julho na Europa tornaram-se 950 vezes mais prováveis devido às alterações climáticas causadas pelo Homem, asseguram os cientistas.



FIGURA 1. Onda de calor. (Pixabay)

Uma análise publicada recentemente pelo grupo [World Weather Attribution](#), concluiu que as recentes vagas de calor na Europa e nos Estados Unidos foram tornadas, no mínimo, 950 e 4400 vezes mais prováveis pelo aquecimento global. Mesmo sem uma sofisticada modelação informática, o padrão é claro: os oito anos mais quentes ocorreram todos nos últimos oito anos, segundo a Organização Meteorológica Mundial da ONU. Com a onda de calor que assolou o sul da Europa nesse mês, o recorde histórico de temperatura máxima nesta região: 48,8°C na Sicília, medidos (embora ainda não verificados oficialmente) em 2021, poderá em breve ser batido. Não se trata apenas de uma flutuação, mas de um padrão, que se tem vindo a acentuar nos últimos três verões. A estação de 2021 foi a mais quente

alguma vez registada na Europa, rapidamente ultrapassada pelo verão de 2022 por quase meio grau. As observações dizem-nos, sem dúvida, que o clima tem estado a aquecer e que os extremos estão a agrupar-se e a tornar-se mais frequentes do que eram antes. A relação entre o aquecimento global alimentado por combustíveis fósseis e as ondas de calor é bastante clara. O Painel Intergovernamental das Nações Unidas sobre Alterações Climáticas garante que *“cada 0,5°C adicional de aquecimento global provoca aumentos claramente discerníveis na intensidade e frequência de fenómenos extremos de calor, incluindo ondas de calor”*.

Fonte: <https://pt.euronews.com/>

NASA publica álbum com “Sons do Universo”.



FIGURA 1. Projeto “Sons do Universo”. Fonte: Telescópio James Webb, NASA

O Projeto de Sonorização da NASA está a transformar em sons, e até em sinfonias, os dados recolhidos nos confins do universo. Como soariam as profundezas da nossa galáxia se pudéssemos ouvir os sons que produzem? Este projeto faz parte dos esforços da agência espacial norte-americana para

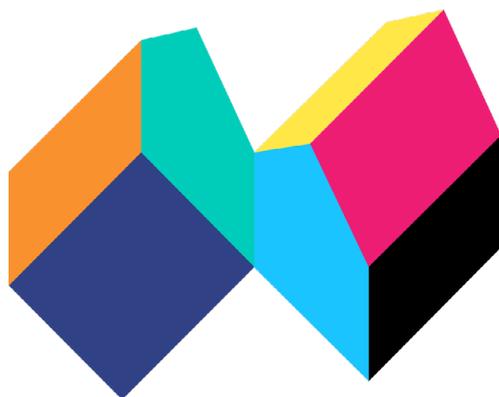
permitir que as pessoas com deficiências visuais possam sentir a beleza do cosmos através dos sons. Recentemente, a NASA lançou 16 apresentações de dados que, pela primeira vez, levam até aos ouvintes interpretações sonoras da Via Láctea e de outras galáxias. De que forma? Os telescópios permitem aos cientistas verem diferentes objetos no nosso universo, filtrando as imagens através de diferentes tipos de luz. Por exemplo, a adição de cor a esses objetos observados permite identificar os vários elementos químicos que fazem parte dos fenómenos observados. Sem telescópios ou processamento de imagem, as representações visuais que explicam o cosmos seriam invisíveis para nós. A sonorização funciona com o mesmo princípio, mas com um tipo de processamento diferente, e a técnica implica, em suma, traduzir informação de algum tipo num som de algum tipo. As sonorizações foram criadas utilizando diferentes técnicas com base no objeto e nos dados disponíveis. Isto permitiu retratar os dados científicos da forma que fazia mais sentido para cada fenómeno cósmico. Nos links abaixo, encontra algumas sonorizações do último álbum da NASA. Leia as descrições de cada vídeo do Youtube para obter os pormenores sobre as escolhas de composição e a fonte das visualizações.

Data Sonification: Galactic Center (Multiwavelength)

Data Sonification: Bullet Cluster (Multiwavelength)

Data Sonification: M51 (Whirlpool Galaxy) Multiwavelength

Sobre a situação atual da Casa das Ciências.



Caros leitores.

Com esta edição da *Revista de Ciência Elementar* (RCE) inaugura-se uma nova fase na sua publicação que passará a ser apenas em suporte digital, livremente disponível para todos por transferência (*download*) a partir do portal da [Casa das Ciências](#).

Existem essencialmente duas razões que nos levam a fazer esta opção. Em primeiro lugar, a Casa das Ciências atravessa um período de dificuldades de sustentabilidade, já que a entidade financiadora, por motivos estratégicos, optou por uma redução significativa do apoio financeiro que garante os custos de funcionamento da Casa das Ciências. Por outro lado, o aumento dos custos de produção das edições em suporte físico (papel) aumentou substancialmente por razões que todos conhecemos (e sentimos). Estes fatores conduziram-nos a uma situação económica que temos que gerir com grande racionalidade, poupando despesas, procurando gerar receitas através das nossas iniciativas e apelando a uma angariação voluntária de fundos, que iremos lançar em breve, através de um apelo aos utilizadores dos recursos da Casa das Ciências.

Como atual Coordenador da Casa das Ciências, estou certo que todos compreendem a situação frágil em que nos encontramos. Mas temos que enfrentá-la e ultrapassá-la, porque acreditamos, com enorme convicção, que o projeto da Casa não pode morrer já que presta um serviço público que tem sido, ao longo dos seus 16 anos de existência, sempre avaliado como sendo de grande qualidade científica e pedagógica e, portanto, de grande utilidade para os docentes

de ensino básico e secundário. Razões que se tornam ainda mais atuais quando se assiste ao recente processo da chamada “digitalização do ensino”.

Provas disso são: (i) o grande número de utilizadores, (ii) o enorme número de *downloads* dos recursos digitais educativos que, após uma avaliação criteriosa feita por avaliadores independentes, são livremente disponibilizados no nosso portal, (iii) a grande participação nos encontros anuais da Casa das Ciências, e ainda (iv) o interesse que as nossas iniciativas (*Revista de Ciência Elementar*, conferências, *WikiCiências*, etc.) têm tido ao longo destes anos.

Vamos continuar, podem estar certos! Com a dedicação e profissionalismo dos nossos três colaboradores que garantem diariamente, com a sua persistência e amor à Casa, a sua manutenção e constante atualização. E também com a convicção da nossa Comissão Editorial e do seu Coordenador, garantes da contínua qualidade do serviço público que prestamos.

Neste contexto, apelo à máxima compreensão de todos vós, e também à vossa solidariedade manifestada através do uso continuado dos nossos recursos, da submissão de novos recursos para publicação no nosso portal, para que possa ser divulgado e utilizado por todos, e ainda no contínuo interesse por todas as nossas iniciativas que continuarão a ser divulgadas pelos canais habituais (portal da Casa, *newsletters* periódicas, redes sociais e *media*).

Desejo a todos um excelente ano letivo de 2023/24, com o sucesso dos vossos alunos e com a concretização, há muito esperada, das expectativas de valorização profissional que todos merecem.

João Nuno Tavares

Coordenador da Casa das Ciências

As equações de Fresnel.

Eduardo Lage

U.Porto

As leis da ótica geométrica são completamente reproduzidas pelas condições cinemáticas do eletromagnetismo para ondas que incidam sobre uma superfície que divide dois meios distintos. Mas o eletromagnetismo vai mais longe porque fornece expressões bem definidas para as amplitudes relativas das ondas refletida e transmitida – são as equações de Fresnel (1823). Com base nelas, são estudadas a refletância e transmitância para diversos tipos de interfaces separando meios lineares, isotrópicos e não magnéticos, introduz-se o ângulo de Brewster e considera-se a pressão que a radiação exerce sobre um bom condutor.

Quando uma onda eletromagnética incide na superfície plana que separa dois meios diferentes, são originadas uma onda refletida e uma onda transmitida. Para uma onda incidente plana e monocromática, toda a dependência dos seus campos no espaço e no tempo é definida pelo fator:

$$e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad (1)$$

onde \vec{k} é o vetor de onda e ω a frequência angular. As condições de passagem no plano de separação (que se tomará para plano xz , com o eixo y perpendicular), são relações lineares entre componentes do campo e determinam que as três ondas têm a mesma frequência e a mesma componente do vetor de onda naquele plano:

$$k_x^{(i)} = k_x^{(r)} = k_x^{(t)} \quad (2)$$

Conhecidas as relações de dispersão em cada meio, ficam completamente determinados os vetores de onda. Em particular, para a onda refletida, propagando-se no mesmo meio da incidente, a equação (2) impõe:

$$k_y^{(r)} = -k_y^{(i)} \quad (3)$$

Isto é, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

Admitir-se-á doravante que o meio onde se propaga a onda incidente é um dielétrico transparente (identificado por meio 1); quanto ao outro meio (meio 2), tanto pode ser outro dielétrico

transparente como um condutor. Aceitando que nenhum dos meios é magnético, a relação de dispersão é, genericamente:

$$\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(\varepsilon_r + i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \right) \quad (4)$$

onde ε_r e σ são, respectivamente, a permissividade relativa e a condutividade do meio, uma e outra dependentes da frequência.

Os dielétricos são, em geral, isoladores ($\sigma = 0$), o que conduz à identificação do seu índice de refração:

$$\eta = \sqrt{\varepsilon_r} \quad (5)$$

Esta identificação justifica-se porque, para dois dielétricos em presença, a equação (2) origina a lei de Snell (FIGURA 1):

$$\eta_1 \text{sen } \theta_i = \eta_2 \text{sen } \theta_t \quad (6)$$

Para bons condutores ($\sigma \approx 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$) e para frequências óticas ($\nu \equiv \frac{\omega}{2\pi} \simeq 10^{14} s^{-1}$) o termo $\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \sim 10^4$ na equação (4), pelo que pode ignorar-se a permissividade relativa, $\varepsilon_r \sim 1$. A onda transmitida é fortemente atenuada.

Neste artigo são deduzidas as relações entre as amplitudes dos campos e discutidas em detalhe as suas consequências para as duas naturezas limite do segundo meio. Estas relações são conhecidas por equações de Fresnel. Recordar-se que as ondas são transversais para meios lineares isotrópicos e que os campos elétrico, \vec{E} , e magnético, \vec{H} , satisfazem, genericamente, em cada meio, as seguintes equações:

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \mu_0 \omega \vec{H} \quad (7)$$

$$\vec{k} \wedge \vec{H} = -\omega \varepsilon_0 \left(\varepsilon_r + i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \right) \vec{E} \quad (8)$$

com $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ (c é a velocidade da luz no vazio).

Na superfície de separação, as relações de passagem, para além das equações (2), exigem a continuidade do campo magnético e da componente tangencial do campo elétrico, mas, como se verá, só há duas independentes.

Seja qual for o estado de polarização da onda incidente, é sempre possível considerar o seu campo elétrico como sobreposição de duas componentes, uma paralela ao plano de incidência e a outra perpendicular. Estes dois casos são tratados separadamente no que se segue.

Componentes paralelas.

A FIGURA 1 mostra as componentes paralelas do campo elétrico, também se identificando as componentes (perpendiculares) do campo magnético, dirigidas para cá (círculos negros), pelo que são nulas as suas componentes normais à superfície de separação (plano xz). Quanto à continuidade das componentes tangenciais do campo magnético, tem-se, pela equação (7):

$$k^{(i)} (E_i + E_r) = k^{(t)} E_t \tag{9}$$

onde:

$$k^{(i)} = \frac{\omega}{c} \eta_1 \tag{10}$$

é a grandeza do vetor de onda comum para as ondas incidente e refletida.

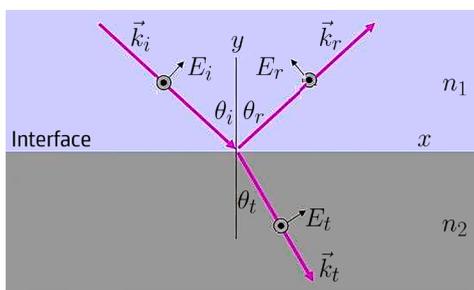


FIGURA 1. Componentes paralelas do campo elétrico.

A continuidade da componente tangencial do campo elétrico dá:

$$(E_i - E_r) \cos \theta_i = E_t \cos \theta_t \tag{11}$$

É óbvio que as componentes normais do deslocamento elétrico, \vec{D} , são nulas pelo que é nula a densidade superficial de carga livre.

a) Admitindo que o meio 2 é, também, um dielétrico, então:

$$k^{(t)} = \frac{\omega}{c} \eta_2 \tag{12}$$

Assim, das equações (9) e (11) resultam as razões:

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &\equiv \frac{E_r}{E_i} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} = \frac{\text{sen}(2\theta_i) - \text{sen}(2\theta_t)}{\text{sen}(2\theta_i) + \text{sen}(2\theta_t)} \\ t_{\parallel} &\equiv \frac{E_t}{E_i} = \frac{\eta_1 \text{sen}\theta_i \cos \theta_i}{\eta_2 \eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} = \frac{2\text{sen}\theta_t \cos \theta_i}{\text{sen}(2\theta_i) + \text{sen}(2\theta_t)} \end{aligned} \tag{13}$$

Aqui, as últimas expressões obtiveram-se invocando a lei de Snell. Estes resultados são conhecidos por equações de Fresnel para as componentes paralelas.

Para incidência normal, tem-se simplesmente:

$$r_{\parallel} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad t_{\parallel} = \frac{2\eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad (14)$$

Observando a expressão de r_{\parallel} na equação (13), conclui-se que esta razão se anula quando $\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2}$.

Tal ângulo de incidência é designado por ângulo de Brewster (1815), θ_B . Usando a lei de Snell, obtém-se:

$$\text{tg}(\theta_B) = \frac{\eta_2}{\eta_1} \quad (15)$$

Tem-se $\theta_B \approx 53^\circ$ para a água e $\theta_B \approx 56^\circ$ para o vidro.

A discussão seguinte distingue os casos $\eta_1 < \eta_2$ e $\eta_1 > \eta_2$.

1. Para $\eta_1 < \eta_2$, por exemplo, interface ar ou vácuo ($\eta = 1$) e água ($\eta = \frac{4}{3}$) ou vidro

($\eta = \frac{3}{2}$), a lei de Snell mostra que é sempre $\theta_t < \theta_i$ pelo que as equações (13) são reais.

2. Para $\eta_1 > \eta_2$, por exemplo, trocando os meios anteriores, existe um ângulo (de incidência) limite, θ_L para o qual é $\theta_t = \frac{\pi}{2}$. Invocando a lei de Snell, tem-se $\text{sen}(\theta_L) = \frac{\eta_2}{\eta_1}$ (note-se: $\theta_L > \theta_B$).

i) Para $\theta_i \leq \theta_L$ as equações 13 aplicam-se tal como estão escritas, verificando-se que, no ângulo limite, é $r_{\parallel} = 1$ e $t_{\parallel} = \frac{\eta_1}{\eta_2}$.

ii) Para $\theta_i > \theta_L$ a lei de Snell conduz a um ângulo θ_t complexo, o que apenas significa que não pode mais ser interpretado geometricamente, apenas havendo necessidade de interpretar os resultados já obtidos. Na verdade, convém lembrar que $k^{(t)} \cos \theta_t \equiv k_y^{(t)}$ sendo fácil obter esta grandeza através da lei de dispersão:

$$k_y^{(t)} \equiv k^{(t)} \cos \theta_t = \sqrt{k^{(t)2} - (k^{(i)} \text{sen} \theta_i)^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\eta_2^2 - (\eta_1 \text{sen} \theta_i)^2} = -i \frac{\omega}{c} \eta_1 \sqrt{(\text{sen} \theta_i)^2 - (\text{sen} \theta_L)^2}$$

Mutações.

Gato escondido com rabo de fora?

António Amorim

DB/ FC/ U. Porto

As mutações são raras e a estimativa da frequência com que ocorrem é difícil. Ocorrem em muitas formas e as consequências são correspondentemente variadas. Analisam-se aqui esses dois problemas na perspectiva evolutiva.

Mutação (mudança, no nosso latim vulgar) não é mais que um erro de cópia (ou o seu resultado) do material genético (só abordaremos o que tecnicamente se designa por mutação germinal, isto é, as mutações que ocorrem na produção de gâmetas que originem um descendente, por oposição às somáticas, que ocorrem nas células não reprodutoras). Este erro, “gato” ou “gralha” na imagem tipográfica, pode assumir muitas formas e implicar consequências muito diversas e é o motor da evolução. Adivinha-se, portanto, que a velocidade evolutiva será dependente da frequência com que estes erros ocorrerão. Também será fácil inferir que em muitos casos as implicações para a reprodução do organismo portador da mutação poderão ser tão graves que impeçam a sua reprodução e nesse caso o erro será literalmente um nado-morto.

Tipos de mutação.

Vamos então começar por dar uma ideia dos tipos de mutação que podem ocorrer para podermos concretizar estas intuições. Para isso teremos de lembrar que a informação genética está contida na sequência e organização de um ácido nucleico em todos os atuais seres vivos conhecidos (DNA, ou RNA em alguns vírus). A codificação da informação é feita através da variação da composição química do DNA em termos dos seus nucleótidos, simbolizados pelas letras A, C, G e T. Uma sequência de DNA poderá, pois, ser representada como um texto de um alfabeto reduzido, por exemplo:

...ATCGATTCAGA...

Um dos possíveis erros será uma troca de letras, uma substituição:

...ATCGATTCAÇA...

em que o original G foi erradamente copiado e introduzido um C, sublinhado na sequência mudada. Note-se que, apesar de se tratar de uma letrinha apenas, as consequências podem ser dramáticas e levar à incapacidade de sobrevivência do seu portador, o que significa que a seriedade das consequências não é previsível pela simples análise do erro, fora do seu contexto. Por outras palavras, uma mesma substituição (no nosso caso, G→C) pode ser absolutamente inócua ou letal, dependendo da leitura dessa informação.

Note-se que as substituições não acarretam variação do comprimento da sequência; pelo contrário, uma deleção ou uma inserção implicarão diminuição ou aumento, respetivamente.

Temos ainda um conjunto de mutações em que se alteram a ordem ou a posição de sequências, como translocações (literalmente, mudança de local) e inversões. Uma vez que o material genético nos seres vivos complexos está organizado em várias unidades, arcaicamente chamadas cromossomas (como livros numa biblioteca) teremos ainda a possibilidade de observar mudanças na arquitetura do material genético, correspondentes a variação do seu número (nulissomias, monossomias, trissomias, etc.) ou da sua estrutura (inversões, duplicações), podendo ainda ocorrer fusões cromossómicas.

Tal como dissemos a propósito das substituições, todas estas alterações mutacionais tem um grau muito variável de consequências para os seus portadores, mas algumas interferem sempre com a sua capacidade reprodutiva e, portanto, são especialmente importantes na evolução. Veremos isso no final deste trabalho, mas antes tentaremos responder à questão já levantada, da frequência das mutações.

Deteção das mutações e estimativa da sua frequência.

Como dissemos, algumas mutações acarretam consequências dramáticas para os seus portadores. Nesses casos, que eram os acessíveis antes da vulgarização das análises bioquímicas e moleculares, a sua ocorrência era imediatamente detetada. Um dos exemplos mais flagrante e suficientemente comum para todos termos já observado um caso, era o do [nanismo acondroplásico](#): pais com estatura normal geravam um filho com esta anomalia, apenas explicável por mutação. Para além desta forma de deteção, que podemos chamar genealógica, existe uma outra, indireta, a filogenética, em que a ocorrência de mutação é inferida do facto de duas espécies com um ancestral comum terem informação genética distinta. Muito simplificada e resumidamente, se observamos que *Homo sapiens* tem, em uma localização específica do genoma, a sequência:

ATCGATTCAGA

e *Pan troglodytes* na posição homóloga:

ATCGATTCA

inferimos que algures na evolução até estas espécies atuais, terá ocorrido uma mutação. Note-se que dispondo apenas desta informação não sabemos qual o estado original, isto é, se

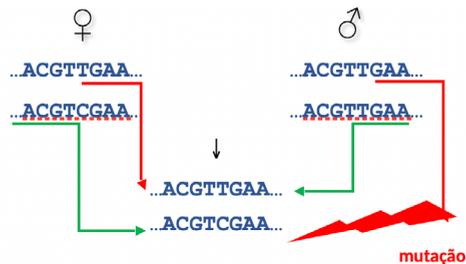
assinalam a amarelo as células onde se verificam incompatibilidades mendelianas e, por conseguinte, se terá verificado mutação:

Trios		Genótipo materno		
		1-1	1-2	2-2
Genótipo paterno	1-1	1-1	1-1	1-1
		1-2	1-2	1-2
		2-2	2-2	2-2
	1-2	1-1	1-1	1-1
		1-2	1-2	1-2
		2-2	2-2	2-2
	2-2	1-1	1-1	1-1
		1-2	1-2	1-2
		2-2	2-2	2-2

A estimativa da frequência das mutações (vulgarmente designada por taxa de mutação) nesta amostra será, pois, obtida simplesmente pelo somatório das frequências das células a amarelo (Na verdade, embora este seja o processo comum de proceder a esta estimativa, devemos esclarecer que é incorreto; em algumas células (por exemplo na correspondente ao trio 1-1/1-1/2-2, terão corrido duas mutações), bem como o total de observações a considerar não é o total de trios contabilizado, mas sim o seu dobro, dado que em cada trio observamos dois eventos de cópia, paterna e materna).

Esta estimativa é, no entanto, enviesada: vamos finalmente abordar a questão sugerida no título: as mutações escondidas, que serão essenciais para uma estimativa correta da frequência das mutações.

Para isso suponhamos agora uma situação em que não se verifique uma incompatibilidade mendeliana:



Neste caso, a interpretação mais tentadora, que não invoca mutação, é a de que a sequência com C na 5.ª posição da sequência do descendente tenha sido transmitida pelo verdadeiro pai, como ilustrado pelas setas verdes. Existe, no entanto, uma outra, como evidenciado pelas setas vermelhas, que demonstra a possibilidade da ocorrência (escondida) de mutação.

Mas esta possibilidade será quantitativamente relevante, ou seja, a proporção de mutações escondidas será significativa? Sem entrar em pormenores tecnicamente complexos, podemos afirmar que sim; olhemos para a tabela seguinte, onde se apresentam os possíveis descendentes em termos de serem (M) ou não (N) resultado de mutação (de novo, para simplificar a apresentação, as duas composições alternativas das sequências analisadas são representadas por 1 e 2).

Trios		Genótipo materno		
		1-1	1-2	2-2
Genótipo paterno	1-1	1-1 NN	1-1 NN ou NM	1-1 NM
		1-2 MN	1-2 NN ou NM ou MM	1-2 NN ou MM
		2-2 MM	2-2 NM ou MM	2-2 NM
	1-2	1-1 MN ou NM	1-1 NN ou NM ou MM	1-1 NM ou MM
		1-2 NN ou NM	1-2 NN ou NM ou MM	1-2 NN ou MM
		2-2 NM ou MM	2-2 NN ou NM ou MM	2-2 NN ou NM
	2-2	1-1 NM	1-1 NM ou MM	1-1 MM
		1-2 NN ou MM	1-2 NN ou NM ou MM	1-2 NM
		2-2 NM	2-2 NN ou NM	2-2 NN

Equações cúbicas e números complexos.

José Carlos Santos

U. Porto

É geralmente referido nos livros de Matemática destinados a alunos do 12.^o ano que a origem dos números complexos está ligada à resolução das equações de terceiro grau e à fórmula de Cardano. Este artigo explora as ligações entre os dois tópicos. E há muitas.

Os alunos do 12.^o ano aprendem a trabalhar com números complexos. É frequente que se explique neste contexto o que é a fórmula de Cardano (que será exposta mais à frente) e que se diga como pode levar a números complexos não reais, mesmo que a equação só tenha coeficientes reais e que só se esteja interessado em soluções reais. E há um exemplo que é mencionado praticamente sempre: a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$. Historicamente, isto faz sentido, pois este mesmo exemplo já surge no primeiro livro dedicado a este tópico: *L'Algebra*, de Rafael Bombelli. Este será o ponto de partida para este artigo. Iremos ver o que diz a fórmula de Cardano, o que é que há de especial (se é que há) relativamente à equação atrás referida e outros tópicos relacionados.

As equações cúbicas até Bombelli.

Resolver equações quadráticas é algo que já se sabia fazer na Mesopotâmia, na primeira metade do segundo milénio a.C.. Como iremos ver, resolver equações cúbicas é algo bastante mais complexo. A primeira pessoa a conseguir um método para resolver todas as equações cúbicas foi Omar Caiam, um poeta, matemático e astrónomo persa que publicou um livro sobre o assunto no fim do século XI. O método aí exposto, que se baseava numa ideia de Arquimedes, envolvia o uso de Geometria (mais precisamente, interseção de cónicas) para resolver aquelas equações. Aparentemente, Omar Caiam ficou frustrado por o seu método não ser puramente algébrico, pois escreveu:

"Quando, no entanto, o objeto de estudo do problema é um número puro, nem nós nem nenhuma pessoa dedicada à Álgebra foi capaz de resolver esta equação. Talvez outros que virão depois de nós venham a ser capazes de colmatar esta lacuna."

Não se vai aqui expor em detalhe a história tortuosa de como surgiu, na Itália do século XVI, um processo algébrico de resolver equações cúbicas. A chamada fórmula de Cardano consiste numa fórmula para obter uma solução da equação $x^3 + px + q = 0$, que nos diz que uma tal solução é dada por

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (1)$$

e surge no livro *Ars Magna*, publicado por Cardano, em 1545.

Um aspeto do que acabou de ser escrito que salta imediatamente aos olhos é que a fórmula (1) só nos permite resolver equações cúbicas de um tipo muito restrito. De que é que serve aquela fórmula se se quiser resolver, por exemplo, a equação $2x^3 + x^2 + x - 1 = 0$? Afinal, não é da forma $x^3 + px + q = 0$. O próprio Cardano explica, no *Ars Magna*, como lidar com este problema. O primeiro passo consiste em dividir a equação anterior pelo coeficiente de x^3 , que é 2, o que dá origem à equação

$$x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \quad (2)$$

Claramente, as duas equações são equivalentes, ou seja, têm as mesmas soluções. O passo seguinte consiste em introduzir uma nova incógnita, y , e substituir, na equação anterior, x por $y - 1/6$. Acontece que

$$\left(y - \frac{1}{6}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{2} = y^3 + \frac{5}{12}y - \frac{31}{54}$$

E, agora sim, pode-se aplicar a fórmula de Cardano. Temos

$$p = \frac{5}{12}, q = -\frac{31}{54} \text{ e } \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = \sqrt{\frac{49}{576}} = \frac{7}{24}$$

Logo, a fórmula de Cardano diz-nos que uma solução da equação

$$y^3 + \frac{5}{12}y - \frac{31}{54} = 0 \quad (3)$$

é

$$y = \sqrt[3]{\frac{31}{108} + \frac{7}{24}} + \sqrt[3]{\frac{31}{108} - \frac{7}{24}} = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Finalmente, tem-se $x = y - 1/6 = 2/3 - 1/6 = 1/2$.

Só falta explicar um detalhe: porquê tomar $x = y - 1/6$? De onde vem aquele $1/6$? Vem do facto de o coeficiente de x^2 na equação (2) ser $1/2$. A regra geral é a seguinte: se se tem uma equação cúbica do tipo $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ e se se fizer a substituição $x = y - a/3$, obtém-se uma equação do tipo $y^3 + py + q = 0$. Em particular, se $a = 1/2$, faz-se $x = y - 1/6$.

Está então visto como a fórmula de Cardano permite, de facto, resolver qualquer equação cúbica. Acontece que não é bem assim. Como Cardano se apercebeu, surge um problema quando $q^2/4 + p^3/27 < 0$. Quando isto tem lugar, a fórmula não faz sentido. Ou, pelo menos, não fazia sentido da primeira vez que Cardano se deparou com o problema.

É no *Ars Magna* que os números complexos surgem pela primeira vez. No entanto, não são mencionados no contexto das equações cúbicas. Surgem pela primeira vez perto do fim do livro, quando Cardano menciona o problema de encontrar dois números cuja soma seja 10 e o produto 40 e dá como solução os números $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$. Mas menciona em seguida a “tortura mental” que consiste em trabalhar com tais números e acaba por dizer que são “tão subtis quanto inúteis”.

Quem atacou de frente o problema de usar a fórmula de Cardano em todos os casos, e não apenas quando $q^2/4 + p^3/27 \geq 0$ foi um contemporâneo e admirador de Cardano, Rafael Bombelli. No seu livro *L'Algebra*, ele provou que qualquer equação cúbica tem alguma solução. Logo, quem pensasse que, por analogia com o que acontece com a fórmula resolvente das equações quadráticas, o facto de se ter $q^2/4 + p^3/27 < 0$ seria uma indicação de ausência de soluções estaria enganado. E é também naquele livro que surge a famosa equação cúbica $x^3 - 15x - 4 = 0$. Bombelli faz notar que, como facilmente se pode verificar, 4 é solução desta equação. Mas se a tentarmos resolver usando a fórmula de Cardano, obtemos

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Bombelli aproveita o facto de se ter $121 = 11^2$ para escrever a expressão anterior sob a forma

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

Em seguida, observa que

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{-1})^3 &= 2^2 + 3 \times 2^2 \times \sqrt{-1} + 3 \times 2 \times \sqrt{-1}^2 + \sqrt{-1}^3 \\ &= 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} \\ &= 2 + 11\sqrt{-1} \end{aligned}$$

e um cálculo análogo mostra que $(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$. Logo, afirma Bombelli,

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

Cúbicas de Bombelli.

Este exemplo é excelente, do ponto de vista pedagógico, para explicar como surgiram os números complexos. Os cálculos são fáceis de levar a cabo e permitem ver como obter a solução que já se sabe que existe. Mas haverá mais exemplos deste tipo? Vamos clarificar o que é que se entende por "este tipo".

Para começar, observe-se que a fórmula de Cardano pode ser reescrita sob a forma

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2}}$$

Logo, se quisermos trabalhar o mais possível com números inteiros, convém que p seja um inteiro múltiplo de 3 e que q seja um inteiro par (no exemplo de Bombelli é o que acontece, pois $p = -15$ e $q = -4$). Em segundo lugar, pretende-se que $q^2/4 + p^3/27$ seja da forma $-n^2$, para algum inteiro $n > 0$ (no exemplo de Bombelli, $q^2/4 + p^3/27 = -11^2$). Também é razoável ter-se $q \neq 0$; não há nada de errado, do ponto de vista lógico, em aplicar a fórmula de Cardano com $q = 0$, mas nesse caso é óbvio que 0 é solução da equação, pelo que este caso não tem interesse. Finalmente, pretende-se que cada um dos números $-q/2 + ni$ e $-q/2 - ni$ seja da forma $(a + bi)^3$ para dois inteiros a e b (no exemplo de Bombelli, temos $2 + i$ e $2 - i$). Vamos chamar cúbica de Bombelli a uma equação cúbica que satisfaça todas estas condições.

Há outras cúbicas de Bombelli além do exemplo já visto? Sim, e é muito fácil perceber o motivo. Basta tomar a equação cúbica $x^3 - 15x + 4 = 0$, pois -4 é solução desta equação e cálculos análogos aos anteriores levam a esta solução, que é então obtida como

$$\sqrt[3]{-2 + 11i} + \sqrt[3]{-2 - 11i} = -2 + i - 2 - i$$

Mais geralmente, se $x^3 + px + q = 0$ for uma cúbica de Bombelli, $x^3 + px - q = 0$ também o é.

Há cúbicas de Bombelli diferentes daquelas que já vimos? Sim, há uma infinidade delas e o exemplo de Bombelli nem sequer é o que envolve números mais próximos de 0. Considere-se a equação $x^3 - 6x - 4 = 0$. Neste caso, $q^2/4 + p^3/27 = -4$. Além disso,

$$-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = 2 + 2i = (-1 + i)^3$$

e

$$-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = 2 - 2i = (-1 - i)^3$$

pelo que, neste caso, a fórmula de Cardano dá origem à raiz

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = -1 + i - 1 - i = -2$$

Há uma maneira simples de obter todas as cúbicas de Bombelli. Tomam-se dois inteiros não nulos a e b e considera-se a equação cúbica

$$x^3 - 3(a^2 + b^2)x - 2(a^3 - 3ab^2) = 0 \quad (4)$$

É sempre uma cúbica de Bombelli. Com $a = 2$ e $b = 1$, obtém-se aquela que vem no livro de Bombelli e, com $a = -1$ e $b = 1$, obtém-se $x^3 - 6x - 4 = 0$. E, naturalmente, podemos criar assim uma infinidade de cúbicas de Bombelli.

Quanto ao motivo de (4) ser uma cúbica de Bombelli, basta ver que, neste caso, $p = -3(a^2 + b^2)$ (que é um inteiro múltiplo de 3) e $q = -2(a^3 - 3ab^2)$ (que é um inteiro par). Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} &= (-a^3 + 3ab^2)^2 - (a^2 + b^2)^3 \\ &= -9a^4b^2 + 6a^2b^4 - b^6 \\ &= -(3a^2b - b^3)^2 \end{aligned}$$

O termo constante do membro da esquerda de (4) não é 0 pois é igual a $-2a(a^2 - 3b^2)$, que não é 0, uma vez que $a \neq 0$ e $\sqrt{3}$ é irracional. Um argumento análogo mostra que $3a^2b - b^3 \neq 0$. Então, neste caso, a fórmula de Cardano afirma que uma raiz da equação (4) é

$$\sqrt[3]{a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i} + \sqrt[3]{a^3 - 3ab^2 - (3a^2b - b^3)i} \quad (5)$$

Mas $a^3 - 3ab^2 \pm (3a^2b - b^3)i = (a \pm bi)^3$ e, portanto, os números que estão dentro dos radicais de ambas as parcelas da soma (5) são da forma $(\alpha + \beta i)^3$, com α e β inteiros. De facto, decorre do que foi visto que a raiz que se obtém neste caso é $2a$, pois (5) é igual a $a + bi + a - bi$.

A validade da fórmula de Cardano.

Voltemos à equação cúbica de Bombelli: $x^3 - 15x - 4 = 0$. Já vimos que 4 é solução desta equação. Será que tem outras? Para determinar isso, podemos dividir $x^3 - 15x - 4$ por $x - 4$; o resultado é $x^2 + 4x + 1$. Então, uma vez que

$$x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1)$$

as soluções da equação $x^2 + 4x + 1 = 0$ também são soluções da cúbica de que partimos. E aquela equação quadrática tem duas soluções: $-2 \pm \sqrt{3}$.

Uma questão natural a colocar aqui é a seguinte: porque é que a fórmula de Cardano nos dá a solução 4 mas não as outras duas? Acontece que esta pergunta parte de um pressuposto falso; com efeito, ao contrário do que poderá parecer, a fórmula de Cardano dá-nos todas as soluções. A fim de explicar porque é que assim é, é conveniente começar por ver porque é que a fórmula de Cardano é válida. Aquela fórmula é frequentemente apresentada sem qualquer justificação, mas até é simples de provar. Se, na expressão $x^3 + px + q$, substituirmos x por $u + v$, obtemos

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u + v) + q$$

Mas $u^2v + uv^2 = uv(u + v)$ e, portanto, afirmar que a expressão anterior é igual a 0 é o mesmo que afirmar que

$$u^3 + v^3 + q + (u + v)(3uv + p) = 0 \quad (6)$$

Para que isto tenha lugar, basta que se tenha $u^3 + v^3 + q = 0$ e $3uv + p = 0$. Mas se for este o caso, então

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -p^3/27 \end{cases}$$

Sol, sombra, bússolas solares

e a Pedra do Sol dos Vikings.

Suzana Nápoles

U. Lisboa

ARTIGO

22

A presença de uma pedra transparente junto a um compasso de navegação nos destroços de um navio do século XVI que naufragou no Canal da Mancha é o mote para o texto que segue, centrado na utilização de instrumentos náuticos de navegação em diferentes épocas e contextos. Conjugando a astronomia e a matemática, estes instrumentos permitem ler os sinais encontrados no céu para a orientação no mar.

A navegação oceânica que se praticava no século XV e XVI fazia-se seguindo a direção dada pela bússola magnética e estimando o caminho percorrido, ou então, seguindo uma direção da bússola e determinando a latitude com recurso ao astrolábio náutico ou ao quadrante náutico.

Mas a partir do final do século VIII e até ao século XI guerreiros, comerciantes e piratas nórdicos, habitualmente designados por Vikings, invadiram, exploraram e colonizaram grandes áreas da Europa e dominaram o Atlântico Norte durante séculos.

Fixaram-se na Gronelândia por volta de 950 d.C., e viajaram milhares de quilómetros em dracares, do próximo oriente, como Constantinopla, ao extremo ocidente como a Islândia, a Gronelândia e a Península Ibérica, onde chegaram em 840.



A denominada expansão Viking constitui uma parte importante da história medieval da Escandinávia, Grã-Bretanha, Irlanda e do resto da Europa em geral. A Póvoa de Varzim, no norte de Portugal e a praia da Nazaré, foram colonizadas pelos vikings, sendo a cidade de Braga muitas vezes saqueada, bem como o vale do rio Cávado, o que motivou a construção das muralhas da cidade de Guimarães.

Embora inventada pelos chineses no século I, a bússola magnética, ou agulha de marear, só começou a ser utilizada na Europa no século III como instrumento náutico que, a bordo, indi-

cava constantemente a mesma direção, podendo assim ser usada para orientação. Pelo facto de esse polo magnético terrestre não coincidir com o polo geográfico, a agulha não apontará exatamente na direção norte-sul. Ao ângulo entre as direções norte-sul verdadeira e magnética chama-se declinação.

D. João de Castro foi um nobre português que foi cientista e escritor, tendo estudado matemática com Pedro Nunes. No século XVI registou valores da declinação magnética no Oceano Atlântico e no Oceano Índico que se revelaram úteis para o estudo do magnetismo terrestre. Notou que a presença de massas metálicas, como por exemplo canhões, nas proximidades das agulhas magnéticas, lhes alterava o comportamento. Embora nos navios de madeira este problema não fosse grave, pois bastava afastar as bússolas dessas massas metálicas, o mesmo veio a revelar-se muito importante nos navios construídos em metal.

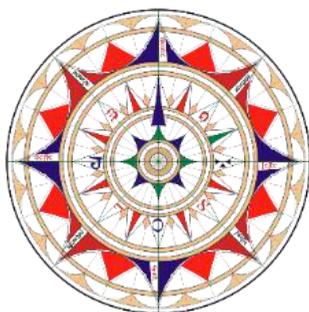
Se atendermos a que os vikings, apesar de barcos em madeira, além de armas como espadas, machados, facas, lanças, arcos e flechas, utilizavam cotas de malha e elmos para sua proteção, as indicações dadas por bússolas magnéticas não eram fiáveis.

Como empreenderiam então os Vikings essas viagens sem recurso a bússolas magnéticas?

Na Gronelândia, nas ruínas de um convento do século XIII, foi achado, em 1948, pelo arqueólogo Christen Leif Vebaek, um fragmento em madeira de um círculo denteado com 16 dentes datado de cerca do ano 1000.



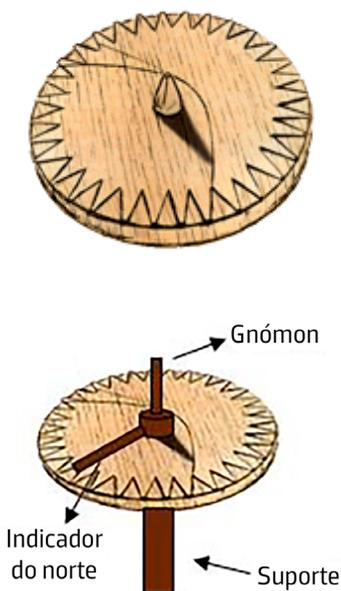
Se estivesse completo teria 32 dentes, à semelhança da Rosa dos Ventos de 32 pontas de uma carta náutica de 1492 da autoria de Jorge de Aguiar, que é a carta náutica assinada e datada mais antiga de Portugal.



Apesar de alguns investigadores considerarem que se tratava apenas de um objeto decorativo, outros sugeriram que o disco seria uma importante ferramenta de navegação. A descoberta de duas linhas gravadas na superfície do disco levou a concluir que este, com uma haste no centro, o gnómon, funcionaria como uma Bússola Solar, correspondendo as linhas ao traçado da sombra da projeção do gnómon. Terá sido usada durante as viagens que os Vikings faziam quando atravessavam o Atlântico rumo à Gronelândia.

Como utilizar uma bússola solar?

Um dia antes da partida, os navegadores marcavam no disco o fim da sombra projetada pelo gnómon em intervalos regulares. Ligando esses pontos, obtinham uma curva. Para obter a direção Norte-Sul bastava desenhar uma linha reta unindo o centro do disco com o ponto da curva mais próximo do gnómon. Uma vez no mar, bastava fazer coincidir o final da sombra do gnómon com um ponto da curva para se orientarem.



Nas bússolas com gnómon móvel, quando ao rodá-lo a sua sombra atingir a curva marcada no disco, a haste horizontal aponta para norte.

Será que existe alguma relação entre uma bússola solar e um relógio de sol?

O relógio de sol é um instrumento que determina as divisões do dia através do movimento da sombra de um objeto, o gnómon, sobre o qual incidem os raios solares e que se projeta sobre uma base graduada, o mostrador ou quadrante. Suponha-se que a Terra é uma superfície cujo eixo de rotação passa pelo seu centro e que ela se encontra parada enquanto o sol se move de Este para Oeste. À medida que o sol efetua o seu movimento (aparente), a sombra do eixo cai no plano do equador e move-se 15° por hora.

Num selo postal das Ilhas Faroé está representada uma bússola solar.

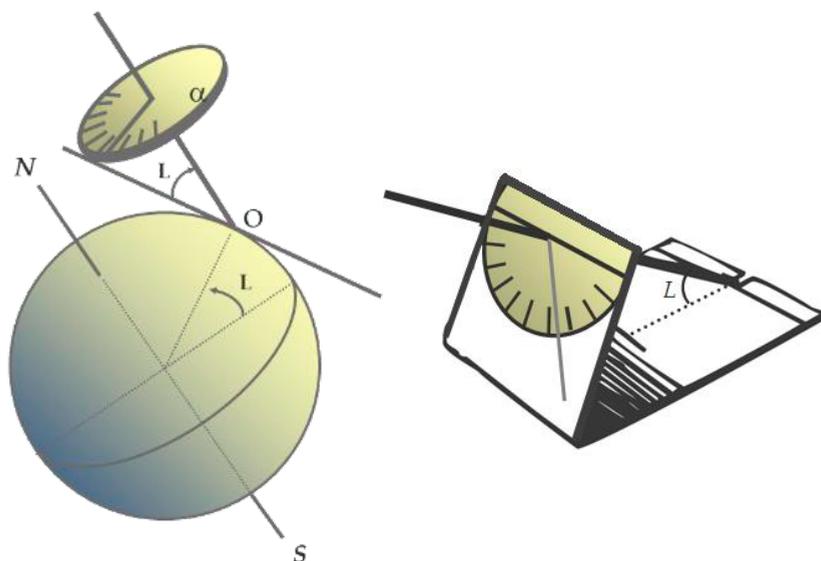


Bússola

Timoneiro

Barco Viking

Tomando, num local de latitude L uma superfície plana atravessada por um eixo perpendicular e colocando-a paralelamente ao plano do equador, se a partir da posição da sombra do eixo quando o sol passa no meridiano do lugar (meio-dia) se marcarem ângulos múltiplos de 15° , obtêm-se as marcações das horas do dia. Denomina-se *equatorial com mostrador plano* um relógio com estas características.



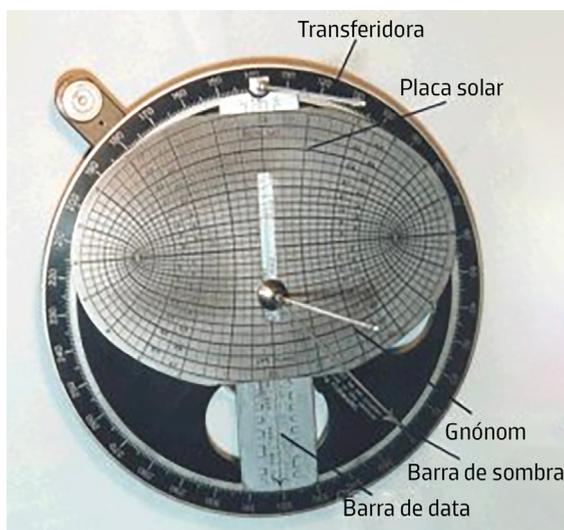
Podemos dizer que o relógio de sol e a bússola solar funcionam de modo inverso.

Enquanto num relógio de sol, a orientação do gnómon exatamente na direção norte-sul permite que a sua sombra no mostrador indique a hora, numa bússola solar é a direção da sombra do gnómon que permite determinar a direção norte-sul.

A bússola solar só permite navegar dentro da latitude para a qual foi construída, uma vez que o tamanho da sombra projetada pelo gnómon varia com a latitude. Para ser utilizada noutras latitudes há que traçar a linha correspondente à sombra do gnómon nessas latitudes. Mas com o traçado de várias linhas torna-se difícil a sua utilização, uma vez que é necessário memorizar qual a linha que está a ser utilizada. A vantagem de uma bússola solar sobre uma bússola comum é que aponta para o norte verdadeiro.

Durante a Segunda Guerra Mundial, alguns exércitos que combatiam no deserto usaram bússolas solares.

Apesar de mais modernas, mais precisas, e contemplando uma escala para várias latitudes, baseavam-se no mesmo princípio.



Mas a bússola solar só funciona quando há sol, pelo que a sua utilização é limitada, nomeadamente no Atlântico Norte, tendo em conta as nuvens pesadas e a neblina da região.

Como conseguiriam então os vikings fazer longas viagens marítimas sem identificar um ponto de referência seguro?

Durante décadas, os investigadores sugeriram que as “pedras do sol”, mencionadas em contos vikings como “A Saga do Rei Olaf”, eram a chave para navegar sob céus menos ensolarados. As pedras do sol da lenda podiam identificar a localização do sol mesmo que este estivesse oculto por nuvens, no entanto, nenhuma dessas pedras foi encontrada em embarcações vikings naufragadas.

Alótropos do carbono.

André Terra, Alexandre Magalhães

U.Porto

O carbono é o quarto elemento químico mais abundante no Universo, ultrapassado somente pelos elementos hidrogénio, hélio e oxigénio, sendo formado no interior de grandes estrelas como resultado de reações de fusão nuclear a partir do elemento mais leve hélio. Na crosta terrestre é somente o décimo sétimo elemento químico mais abundante, surgindo fundamentalmente na forma de vários tipos de carbonatos, matéria orgânica e dióxido de carbono na atmosfera. No entanto, é um dos elementos mais versáteis que encontramos na natureza, fornecendo a base para a vida no nosso planeta.

O carbono está presente em compostos orgânicos naturais, como por exemplo proteínas, ácido desoxirribonucleico–DNA, minerais e ainda em combustíveis fósseis, ou em compostos quimicamente manipulados, como por exemplo alguns fármacos, plásticos e polímeros sintéticos (FIGURA 1).

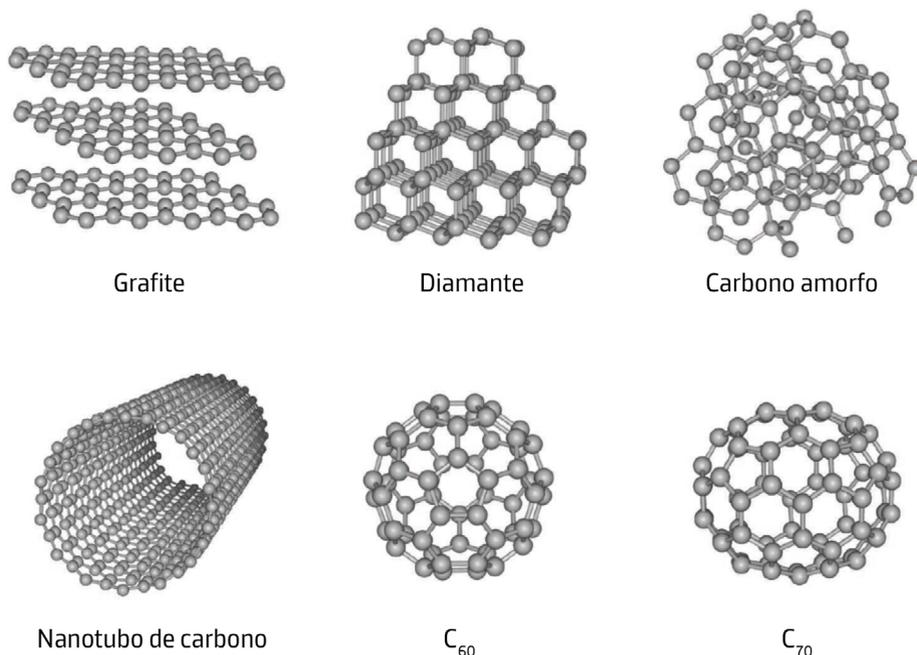


FIGURA 1. Alguns exemplos de alótropos de carbono. As estruturas representadas em todas as figuras foram obtidas com o software de visualização GaussView 5.0.

A variedade de compostos quase ilimitada resulta da capacidade do carbono para estabelecer múltiplas ligações covalentes consigo mesmo e com muitos elementos da tabela periódica. Esta versatilidade de ligação do carbono manifesta-se na variabilidade de estruturas moleculares e na ampla gama de propriedades químicas e físicas das diversas substâncias. Hoje em dia, através das ferramentas da química sintética moderna, é possível personalizar o *design* das propriedades e funcionalidades de modo a obter substâncias com um objetivo específico bem identificado.

Substâncias constituídas somente por um só elemento, ou substâncias elementares, podem apresentar diferentes formas, no mesmo estado físico, designadas alótropos. O carbono é capaz de formar uma grande variedade de alótropos devido à sua versátil valência química. Novos alótropos vão sendo continuamente descobertos, aumentando a diversidade das estruturas carbônicas conhecidas e alargando as suas possíveis aplicações. Entre os alótropos mais conhecidos destacam-se o diamante e a grafite, mas existem outros como o grafeno, o grafino, os fulerenos, os nanotubos de carbono e um dos mais recentemente descobertos, o bifenileno. As propriedades físicas do carbono e, conseqüentemente, as suas aplicações tecnológicas, variam de acordo com sua forma alotrópica.

Grafite.

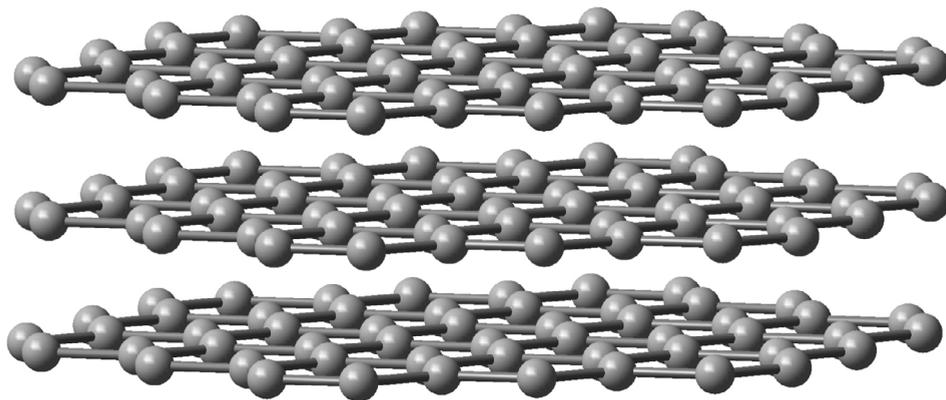


FIGURA 2. Estrutura da grafite.

A grafite é um mineral com estrutura atômica de camadas planares em que os átomos de carbono estão dispostos formando hexágonos contíguos.

Na grafite, cada átomo de carbono usa apenas 3 dos seus 4 elétrons de valência em orbitais híbridas do tipo sp^2 para estabelecer ligações covalentes com outros três átomos de carbono num arranjo triangular regular. Cada plano de carbonos interatua por forças fracas de van der Waals com outros dois planos paralelos à distância média de 0,34 nm, o que faz com que as camadas carbônicas possam deslizar facilmente umas sobre as outras tornando a grafite um bom lubrificante (FIGURA 2).

Além disso, o quarto elétron de valência de cada carbono, que se encontra numa orbital atômica perpendicular ao plano, contribui para estabelecer uma rede alternada de ligações do tipo π que permite a deslocalização e mobilidade eletrônica acima e abaixo da placa carbônica. Por esta razão, a grafite é um condutor elétrico em condições padrão; a condução de eletricidade faz-se ao longo dos planos dos átomos de carbono, mas não na direção perpendicular. A grafite é a forma mais estável de carbono e possui baixa dureza e alto ponto de fusão (a curva de fusão do diagrama de fases do carbono é ainda alvo de pesquisa, estimando-se a temperatura de fusão da grafite entre 4000K e 5000K). Industrialmente, a grafite é muito utilizada em materiais refratários na siderurgia, em eletrodos para processos eletroquímicos, apresentando também alguma expressão na indústria automóvel para revestimento de peças de travagem, juntas e embraiagem.

Diamante.

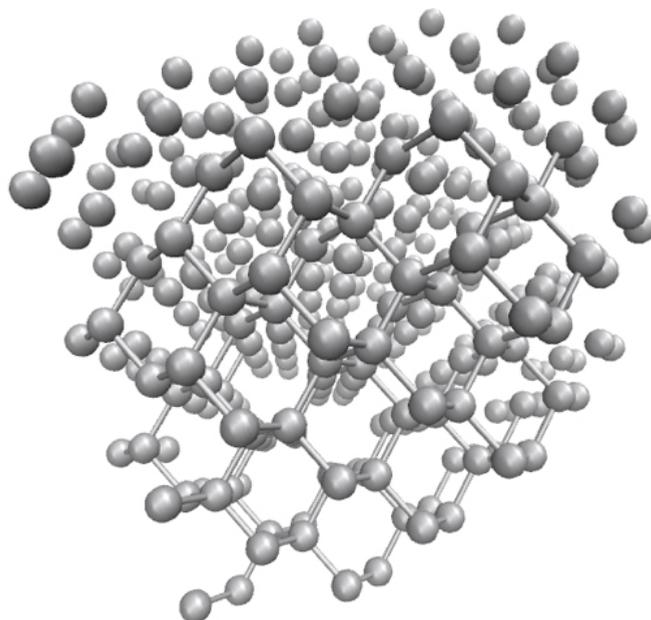


FIGURA 3. Estrutura do diamante.

O diamante é o mineral natural conhecido mais duro. Nenhuma substância natural conhecida pode cortar ou riscar um diamante, exceto outro diamante. Esta particular dureza, o índice de refração extremamente alto, elevado ponto de fusão (semelhante ao da grafite) e a extraordinária capacidade para dispersar a luz, tornam este alótropo de carbono muito útil para aplicações industriais e joalheria.

A estrutura cristalina do diamante é uma rede cúbica de face centrada com oito átomos por célula unitária sendo a sua formação facilitada quando o carbono é submetido a altas pressões

e temperaturas, como é típico no interior de planetas como a Terra. Nesta estrutura cada átomo liga-se covalentemente a outros quatro átomos de carbono, numa geometria tetraédrica, formando uma única malha (FIGURA 3). Cada átomo utiliza os seus quatro eletrões de valência para estabelecer ligações covalentes localizadas, por sobreposição de duas orbitais híbridas do tipo sp^3 , com os seus vizinhos, não restando, portanto, eletrões livres; isto explica por que razão o diamante não é um condutor elétrico.

O diamante é menos estável que a grafite do ponto de vista termodinâmico. Isto é, se 12 g de diamante forem transformadas em grafite serão libertados 1895 J de energia. Porém, esta transformação, apesar de ser espontânea a qualquer temperatura, tem dificuldade em ocorrer porque, do ponto de vista cinético, é necessário vencer uma grande barreira energética de ativação para que os átomos no diamante se reorganizem na forma de grafite.

Como foi referido atrás, o diamante tem propriedades que lhe conferem grande utilidade em aplicações industriais, principalmente no fabrico de abrasivos, instrumentos de corte, polimento e perfuração. A utilização de dispendiosos diamantes naturais tornaria economicamente inviável qualquer aplicação tecnológica. Assim, não é de admirar que desde o século XIX se tenha explorado a produção de diamantes sintéticos. Existem hoje em dia vários métodos de síntese, nomeadamente a partir de grafite, usando elevadas pressões e temperaturas que tornam as ferramentas muito mais económicas.

Grafeno.

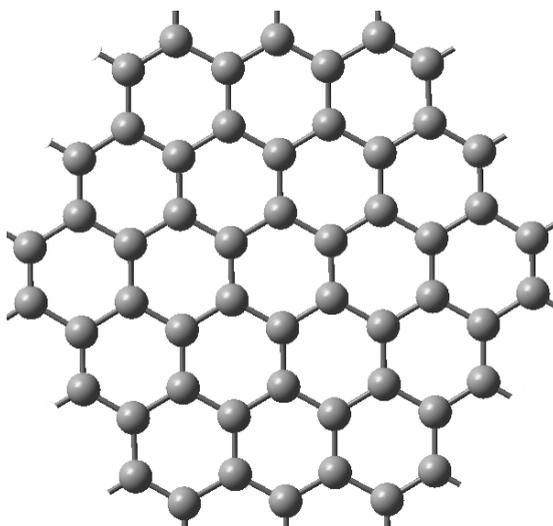


FIGURA 4. Estrutura do grafeno.

O grafeno é considerado o material mais fino do mundo, pois tem uma estrutura planar da espessura de um átomo de carbono; na realidade, o grafeno pode ser visto como uma única

camada de grafite. É constituído por ligações covalentes do tipo sp^2-sp^2 , é um ótimo condutor e possui alta resistência mecânica (FIGURA 4).

O grafeno é um material sintético, uma vez que é extraído pela esfoliação mecânica da grafite. O grafeno é extremamente forte, com uma tensão de 130 GPa que é cerca de duas ordens de grandeza mais forte que o aço, é ainda um excelente condutor de calor e eletricidade e tem uma boa capacidade de absorver luz.

É utilizado em painéis solares transparentes e flexíveis, em janelas inteligentes capazes de controlar o calor e a transmitância de luz.

Grafino.

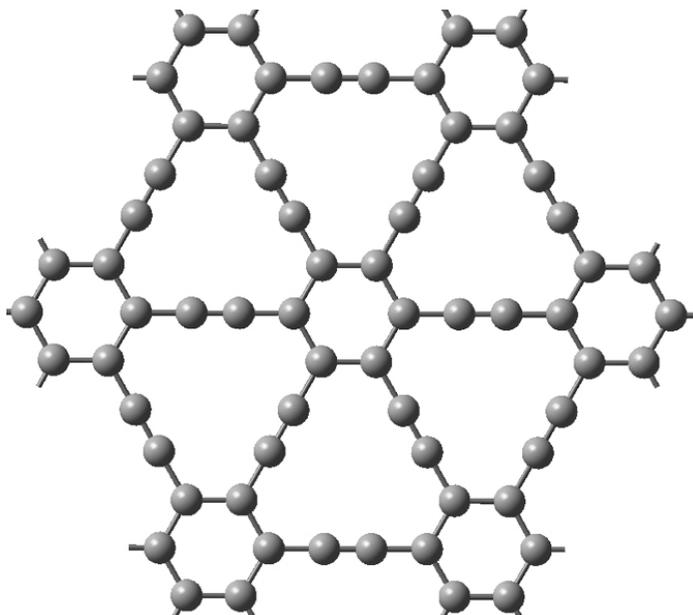


FIGURA 5. Estrutura do grafeno-1.

O grafino é um alótropo de carbono que também apresenta uma estrutura da espessura de um átomo numa organização de uma única folha planar, mas inclui átomos de carbono com hibridação do tipo sp e sp^2 . O grafino- n é uma variação do grafeno, uma vez que apresenta n ligações triplas entre os hexágonos de carbono.

As peculiares propriedades eletrônicas e mecânicas do grafino fazem com que seja um material com elevadas expectativas de aplicação em eletrônica; por exemplo, trabalhos recentes sugerem que o hiato energético (*band gap*) pode ser ajustado por meios mecânicos. Esta característica do grafino pode vir a revelar-se uma enorme vantagem na produção de transistores porque o *band gap* pode ser ajustado após a produção, ao contrário dos semicondutores convencionais cujo *band gap* é definido durante o processo de dopagem (FIGURA 5).

Grafedieno.

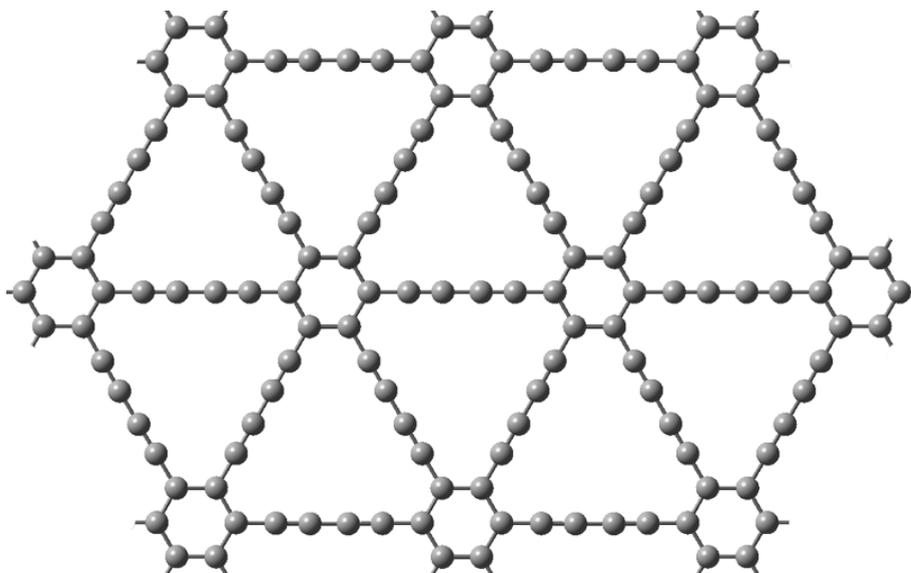


FIGURA 6. Estrutura do grafedieno.

O grafedieno (ou grafino-2) é uma variação do grafino que contém na sua estrutura duas ligações acetilênicas em cada célula unitária (FIGURA 6). O grafedieno é um material mais macio que o grafino e que o grafeno.

Apesar de ainda não se ter conseguido produzir amostras de grafedieno de largas dimensões, a alternância da hibridação sp e sp^2 em certas sequências de carbonos, os poros uniformes, assim como a grande capacidade de mobilidade de carga à temperatura ambiente, permitem antever promissoras aplicações em catálise e nanoeletrônica.

Nanomateriais híbridos de ouro/sílica.

Fábio Martins, Eulália Pereira, Clara R. Pereira

REQUIMTE/LAQV/DQB/FC/U.Porto

As nanopartículas de ouro e de sílica têm aplicação em diversas áreas da ciência e tecnologia devido às suas propriedades únicas e à sua versatilidade. O desenvolvimento de nanomateriais híbridos de ouro/sílica tem assumido especial destaque e aberto novos campos de oportunidades, devido à conjugação das propriedades de ambos os componentes num único nanomaterial (multifuncionalidade) e surgimento de novas propriedades sinérgicas. O presente artigo incide sobre esta classe de nanomateriais híbridos. Primeiramente, apresenta-se uma perspetiva histórica e as propriedades únicas dos nanomateriais híbridos de ouro/sílica, seguindo-se alguns dos métodos mais relevantes usados para a sua preparação. Por último, apresentam-se alguns exemplos de aplicações atuais de nanomateriais híbridos de ouro/sílica, nomeadamente no tratamento do cancro e na purificação de águas.

Antes de introduzir a classe de nanomateriais híbridos de ouro/sílica, é importante começar por definir alguns conceitos fundamentais, nomeadamente o que são nanomateriais e o que distingue nanomateriais híbridos de nanomateriais constituídos por um único componente. Segundo a União Internacional de Química Pura e Aplicada (IUPAC), uma nanopartícula é definida como sendo uma partícula que apresenta pelo menos uma das suas dimensões entre 1 e 100 nm. A escolha deste limite superior baseia-se no facto destas partículas apresentarem propriedades distintas das propriedades do mesmo material macroscópico (*bulk material*). Contudo, o termo “nano” pode ainda ser estendido a materiais com dimensões inferiores a 500 nm, quando estes apresentam propriedades diferentes dos materiais macroscópicos correspondentes, nomeadamente propriedades químicas, elétricas, óticas, mecânicas, magnéticas e reológicas.

As propriedades únicas de nanomateriais constituídos por um único componente, por exemplo, nanopartículas de ouro, nanopartículas de sílica e nanomateriais de óxidos de ferro magnéticos, levou ao desenvolvimento de métodos para a sua síntese que permitam obter um elevado controlo de parâmetros como a morfologia (tamanho e forma), propriedades texturais (área superficial específica e porosidade) e química superficial. Nas últimas décadas, tem-se observado um interesse crescente na investigação e desenvolvimento de sistemas substancialmente mais complexos, constituídos por pelo menos dois nanomateriais diferentes, os quais são designados de nanomateriais híbridos. Estes novos materiais permitem não

só ultrapassar algumas das limitações inerentes aos nanomateriais monocomponente, mas também apresentam novas propriedades provenientes da interação entre os componentes, permitindo assim desenvolver plataformas multifuncionais.

Recentemente, os nanomateriais híbridos de ouro e sílica têm suscitado um especial interesse para diversas aplicações, nomeadamente nas áreas da biomedicina, desenvolvimento de sensores para quantificação de espécies químicas e catálise. Este artigo apresenta uma perspetiva abrangente sobre os nanomateriais híbridos de ouro/sílica e sua importância na atualidade. Na primeira parte apresenta-se um breve enquadramento histórico, seguido de uma discussão sobre as suas principais propriedades e métodos de síntese. Por último, serão apresentados alguns exemplos atuais de aplicações deste tipo de nanomateriais, assim como conclusões e perspetivas futuras desta área de investigação.

Perspetiva histórica.

O início da nanotecnologia é muitas vezes conotado com a famosa palestra do físico Richard Feynman, em 1959, intitulada *There's Plenty of Room at the Bottom*. No entanto, nessa altura, as capacidades técnicas de miniaturização eram muito limitadas, pelo que a proposta de Feynman era ainda meramente especulativa. Só a partir da década de 1970 é que verdadeiramente se iniciou a investigação científica em nanotecnologia, possibilitada pelos avanços nas técnicas de miniaturização e de microscopia. A área foi batizada por Norio Taniguchi, em 1974, e teve como um dos seus grandes ideólogos o físico Eric Drexler, que despoletou um elevado interesse na comunidade científica e na opinião pública com a publicação do livro *Engines of Creation: The Coming Era of Nanotechnology*, em 1986.

A história dos materiais componentes dos híbridos em que nos focamos neste artigo, o ouro e a sílica, é bem mais antiga, com várias aplicações tecnológicas reportadas ao longo da história da humanidade. Além da sua utilização em joalheria, o ouro, quer à macroescala quer à nanoescala (nanopartículas), foi utilizado em medicina e na produção de vidro dicroico (FIGURA 1).



FIGURA 1. *Lycurgus Cup*, Império romano, século IV. O vidro que integra esta taça possui na sua constituição nanopartículas de ouro e de prata que a tornam vermelha e transparente quando iluminada por trás e verde opaca quando iluminada pela frente.

Na Idade Média, os elixires de ouro eram um remédio para o tratamento de febres e até mesmo da sífilis. Contudo, só em 1890 é que a sua utilização foi reportada na medicina moderna pelo bacterologista Robert Koch, que identificou os efeitos tóxicos do ouro no tratamento da tuberculose. Embora ainda se possam encontrar terapias análogas, com o desenvolvimento da medicina moderna, muitas destas têm caído em desuso.

A sílica existe na natureza sob a forma de quartzo, o segundo mineral mais abundante na crosta terrestre, sendo utilizada desde a pré-história no fabrico de utensílios, armas e objetos decorativos. Hoje em dia, continua a ser uma matéria prima muito importante na indústria da construção, fabrico do vidro, indústria eletrónica e nas indústrias alimentar, farmacêutica e cosmética. A sua utilização sob a forma de nanopartículas começou na década de 1970, após a descoberta do processo de síntese por Werner Stöber em 1968. Nos anos que se sucederam, foram propostas diversas otimizações e aprimoramentos ao método de Stöber, dando origem a nanomateriais de sílica com novas morfologias e propriedades texturais. Em particular, destaca-se a introdução de porosidade na estrutura da sílica, produzindo assim sílica mesoporosa, com aplicações em catálise, entrega controlada de fármacos e imagiologia.

Propriedades das nanopartículas de ouro e das nanopartículas de sílica.

As nanopartículas de ouro e de sílica por si só apresentam um conjunto considerável de propriedades apelativas. As nanopartículas de ouro têm uma elevada estabilidade química e coloidal, assim como uma baixa toxicidade, o que as torna perfeitas para aplicações biológicas. No entanto, são as suas propriedades óticas únicas que as tornam tão interessantes para inúmeras aplicações tecnológicas. Estas propriedades óticas advêm da forma como as nanopartículas de ouro interagem com a radiação eletromagnética. Quando a radiação eletromagnética incide sobre um metal, o campo eletromagnético oscilante da luz induz a oscilação da nuvem eletrónica de condução na superfície da partícula. À escala nanométrica esse fenómeno, denominado de ressonância plasmónica de superfície localizada, dá origem a uma forte absorção de radiação eletromagnética (FIGURA 2).

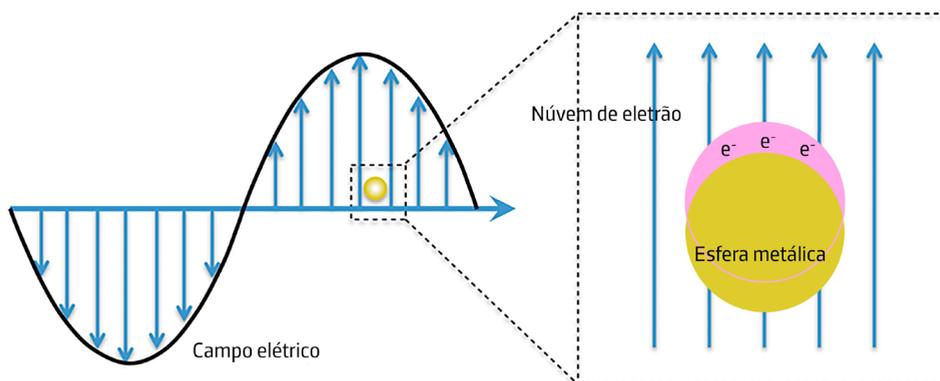


FIGURA 2. Ressonância plasmónica de superfície localizada de uma partícula metálica.

Tal ocorre quando a frequência da radiação incidente iguala a frequência de oscilação natural dos elétrons à superfície da nanopartícula, dando origem a uma interação construtiva. Este fenômeno é responsável pela absorção de energia que, por sua vez, pode dar origem a dispersão de radiação, conversão em calor ou transferência para moléculas na proximidade da superfície da partícula, isto é, espécies químicas que se encontrem ancoradas ou adsorvidas na sua superfície.

No caso das nanopartículas de ouro, a banda plasmônica de superfície localizada ocorre a um comprimento de onda na região do visível, propriedade que partilha apenas com dois outros metais, a prata e o cobre. A frequência de ressonância plasmônica de superfície localizada depende de vários fatores, nomeadamente do tamanho e forma das nanopartículas, assim como da constante dielétrica do meio circundante. Por exemplo, as nanopartículas de ouro esféricas com cerca de 15 a 20 nm de diâmetro apresentam uma cor vermelha devido a fenômenos de ressonância a um comprimento de onda de 520 nm. Para nanopartículas esféricas de dimensões superiores, o comprimento de onda a que ocorre a ressonância aumenta, levando progressivamente a uma cor mais arroxeada (FIGURA 3). A variação de cor é ainda mais drástica para nanopartículas não esféricas. No entanto, a propriedade mais relevante destas bandas de absorção é a sua elevada intensidade, com coeficientes de extinção que podem ser até 1000 vezes superiores aos de corantes orgânicos.

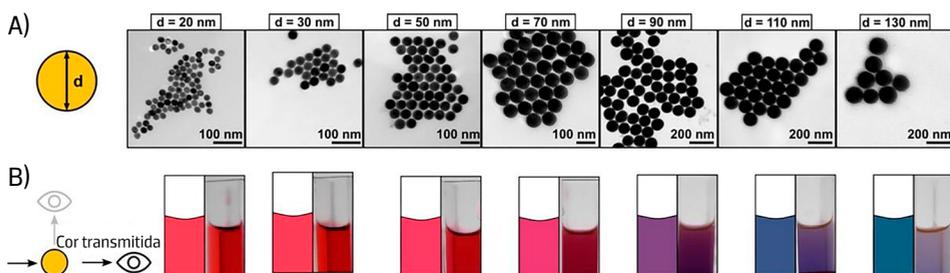


FIGURA 3. Influência do tamanho de partícula na cor de dispersões coloidais de nanopartículas de ouro.

A) Imagens de microscopia eletrônica de transmissão das nanopartículas de ouro com dimensões de 20 a 130 nm. B) Cor das dispersões coloidais correspondentes.

Similarmente às nanopartículas de ouro, as nanopartículas de sílica possuem uma elevada estabilidade química e coloidal e baixa toxicidade, permitindo assim a sua utilização em aplicações biológicas. Contudo, o grande trunfo das nanopartículas de sílica é a possibilidade de, no processo de síntese, conferir-lhes uma estrutura com elevada porosidade e área superficial. Esta característica das sílicas porosas, especialmente das sílicas mesoporosas (tamanho de poro entre 2 e 50 nm), faz deste tipo de partículas excelentes plataformas para introdução de espécies químicas, quer para utilização como nano-reatores, quer para a entrega controlada de fármacos. As nanopartículas de sílica também apresentam uma química superficial muito rica, devido à presença de grupos silanol, o que permite a ligação de moléculas orgânicas e a sua hibridização com outros nanomateriais.

As propriedades singulares destas duas famílias de nanomateriais podem ser facilmente combinadas numa só plataforma, através da preparação de nanopartículas híbridas de ouro/sílica. Dessa forma é possível conjugar as propriedades óticas do ouro, com a elevada área superficial da sílica mesoporosa, mantendo ainda uma excelente biocompatibilidade e estabilidade. Esta multifuncionalidade pode ser útil numa vasta gama de aplicações, desde a construção de sensores para deteção e quantificação de espécies químicas/bioquímicas, à remoção de poluentes existentes em águas residuais e, até mesmo, ao diagnóstico e tratamento de doenças.

Preparação de nanomateriais híbridos de ouro/sílica.

A preparação de nanomateriais híbridos tem sido um dos grandes desafios em nanotecnologia, dado que a conjugação de materiais diferentes exige que se ultrapasse o problema da incompatibilidade existente entre a estrutura cristalina de diversos materiais e, em muitos casos, da sua baixa adesão. Atualmente, são já conhecidas diversas estratégias de síntese que permitem preparar materiais híbridos com um excelente controlo do seu tamanho/distribuição de tamanhos, forma e química de superfície. Em nanopartículas híbridas, a conformação relativa entre os dois componentes dá origem a diferentes tipos de partículas, destacando-se (FIGURA 4): A) Nanopartículas núcleo-coroa (*core-shell*); B) Nanopartículas tipo saco vitelino (*yolk-shell*); C) Nanopartículas heterodiméricas; D) Nanopartículas de Janus; E) Nanopartículas decoradas. Nesta secção serão somente abordados os processos de síntese mais relevantes para a preparação de nanopartículas híbridas de ouro/sílica de três tipos, nomeadamente núcleo-coroa, nanopartículas de Janus e nanopartículas decoradas.

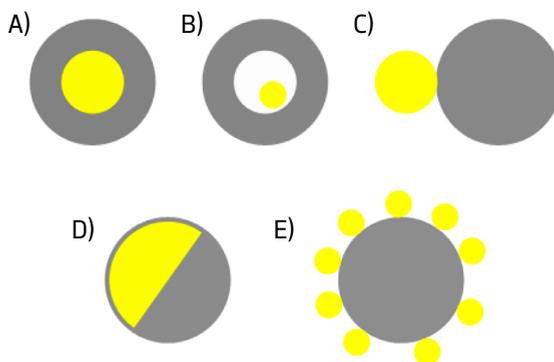


FIGURA 4. Diferentes tipos de nanopartículas híbridas. A) Nanopartículas núcleo-coroa. B) Nanopartículas tipo saco vitelino(*yolk-shell*). C) Nanopartículas heterodiméricas. D) Nanopartículas de Janus. E) Nanopartículas decoradas.

Paradoxos.

(Clássico e quântico) de Zenão.

João Nuno Tavares

U. Porto

Zenão de Eleia (cerca de 490/485 a.C.–430 a.C.?) foi um filósofo pré-socrático da escola eleática que nasceu em Eleia, hoje Vélia, Itália. Discípulo de Parménides de Eleia, defendeu de modo apaixonado a filosofia do mestre. O seu método consistia na elaboração de paradoxos. Deste modo, não pretendia refutar as teses que combatia mas sim mostrar os absurdos daquelas teses (e, portanto, sua falsidade). Acredita-se que Zenão tenha criado cerca de quarenta destes paradoxos, todos contra a multiplicidade, a divisibilidade e o movimento (que nada mais são que ilusões, segundo a escola eleática).

Paradoxos clássicos de Zenão de Eleia.

Os três paradoxos de Zenão listados na "Física" de Aristóteles (Estagira, 384 a.C.–Atenas, 322 a.C.) são os seguintes:

Dicotomia.

"O que está em movimento deve chegar a meio do caminho antes de chegar ao destino."

Descrito por Aristóteles, *Física VI*: 9, 239b10.

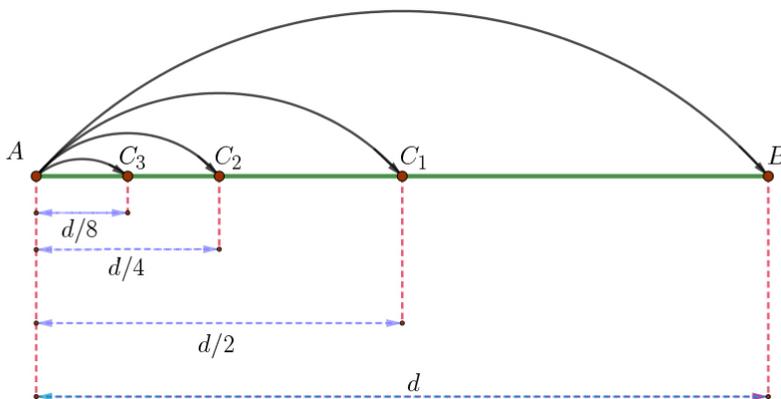


FIGURA 1. Um objeto para chegar a B , partindo de A , tem que atingir o ponto C_1 , com $\overline{AC_1} = \overline{AB}/2$. Para chegar a C_1 , partindo de A , tem que atingir C_2 , com $\overline{AC_2} = \overline{AC_1}/2$, e assim sucessivamente.

Um objeto em movimento nunca alcançará qualquer ponto dado. Mais concretamente, suponha que o leitor quer ir do ponto A ao ponto B , com $d = \overline{AB}$. Antes de chegar ao ponto B , deverá chegar ao ponto C_1 , a meio caminho entre A e B . Antes de chegar ao ponto C_1 , no entanto, o leitor deverá chegar ao ponto C_2 , a meio caminho entre A e C_1 , e assim sucessivamente (FIGURA 1).

Se continuarmos este processo para sempre, terminaremos com uma sequência de distâncias a percorrer do tipo

$$\left\{ \dots, \frac{d}{2^n}, \dots, \frac{d}{8}, \frac{d}{4}, \frac{d}{2} \right\}$$

onde

$$\text{distância de } A \text{ a } C_n = \frac{d}{2^n}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Mas isto é impossível, como afirma Zenão, já que há uma infinidade de etapas a cumprir antes de alcançar o objetivo de chegar a B , o que é impossível num tempo finito!

Além disso, deste cenário resulta um segundo problema— não existe uma primeira distância a percorrer! De facto, qualquer possível "primeira" distância finita, poderia ser subdividida em duas e, portanto, deixaria de ser a "primeira" distância a percorrer. Para Zenão, isso significa que a viagem nem sequer poderia começar!

A conclusão que Zenão tira é a seguinte: percorrer uma qualquer distância finita não pode ser completada nem iniciada e, por isso, todo o movimento é uma ilusão! Conclusão que, como todos sabemos, é absurda. Onde está então o erro de Zenão? Discutiremos isto na secção seguinte.

Mas, para já, mais um dos paradoxos de Zenão, talvez o mais familiar— o paradoxo de Aquiles e a Tartaruga.

Aquiles e a Tartaruga.

"Numa corrida, o corredor mais rápido nunca pode ultrapassar o mais lento, já que o perseguidor deve primeiro alcançar o ponto de onde partiu o perseguido, e, por isso, o mais lento deve manter sempre a liderança."

Descrito por Aristóteles, *Física VI*: 9, 239b15.

Imagine uma corrida entre Aquiles, um herói da guerra de Tróia, e uma Tartaruga. Como a Tartaruga é mais lenta, ela parte com uma vantagem inicial, digamos, de 10 metros.

Aparentemente, Aquiles nunca alcançará a Tartaruga! Porquê? Porque sempre que Aquiles se move a distância que o separa da Tartaruga, ela já se moveu e está, por isso, ainda à fren-

te de Aquiles. O argumento é semelhante ao da Dicotomia. Analisaremos este paradoxo com mais detalhe na secção seguinte.

Finalmente um terceiro paradoxo, o mais intrigante, na minha opinião, que será discutido na secção 4.

A Flecha Voadora.

"É impossível uma flecha estar em movimento durante um período de tempo, porque é impossível que ela se mova em cada instante indivisível."

Descrito por Aristóteles, *Física VI*: 9, 239b10.

Imagine uma flecha que se move no espaço. Em qualquer instante de tempo, sem duração temporal, a flecha não se move para onde está, nem para onde não está. Como sabemos, para ocorrer o movimento, um objeto deve mudar a sua posição. Mas em qualquer instante de tempo a flecha não muda de posição. Como o tempo é composto inteiramente de instantes, então o movimento é impossível! Note que, ao contrário do paradoxo anterior, que divide o espaço, este paradoxo divide o tempo. Além disso, este paradoxo não divide o tempo em segmentos, mas sim em pontos (instantes, sem duração).

Os paradoxos de Zenão levantam uma questão fundamental sobre o universo: será que o tempo e o espaço são contínuos, infinitamente divisíveis, como habitualmente os concebemos, ou serão discretos, havendo uma unidade mínima indivisível de espaço e, analogamente, para o tempo? Estas são questões muito atuais que têm motivado acesa controvérsia nas comunidades científicas de físicos, filósofos da ciência e matemáticos.

Uma abordagem puramente matemática.

Se aceitarmos a coerência e o rigor do chamado cálculo infinitesimal, estudado logo nos primeiros anos de qualquer curso superior de matemática, física, biologia, economia, etc., e até já no ensino secundário, a "resolução" dos paradoxos é quase imediata.

Os processos infinitos do cálculo foram sempre um ponto problemático durante séculos, devido à falta de rigor matemático que demorou muito a construir. Muitos argumentos do cálculo eram heurísticos, como os usados nos *Principia Mathematica* de Isaac Newton, no século XVII, ou nos grandes avanços feitos pelo matemático Euler no século XVIII, para citar apenas dois dos mais notáveis exemplos. No entanto, no final do século XIX, as obras de Weierstrass e Cauchy acrescentaram muito rigor ao cálculo e estabeleceram uma fundamentação lógica sólida sobre os processos infinitos – limites, continuidade, formalização do cálculo diferencial, criado por Newton e Leibniz, no século XVII, etc.

Usando esta base teórica rigorosa, do ponto de vista matemático, podemos "resolver" os dois paradoxos de Zenão (Dicotomia e Aquiles/Tartaruga) com facilidade. Vejamos como.

Dicotomia.

O paradoxo da dicotomia, pode ser resolvido com recurso à série geométrica (FIGURA 2).

$$\frac{d}{2} + \frac{d}{4} + \frac{d}{8} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{2^n}$$

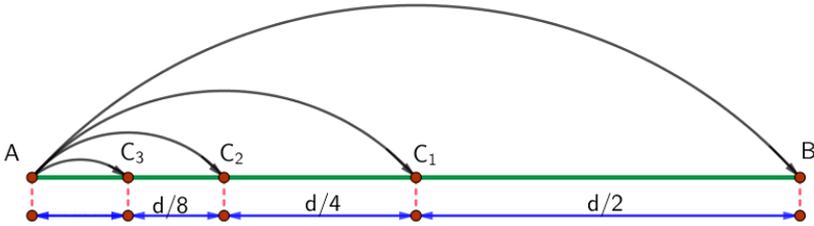


FIGURA 2. Segundo o cálculo infinitesimal, a distância total do percurso de *A* a *B*, é a soma de um número infinito de percursos cujas distâncias são (retroativamente): $\frac{d}{2} + \frac{d}{4} + \frac{d}{8} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{2^n}$, onde $d = \overline{AB}$.

Mas será que isto prova que é possível percorrer a infinidade de distâncias

$$\left\{ \dots, \frac{d}{2^n}, \dots, \frac{d}{8}, \frac{d}{4}, \frac{d}{2} \right\}$$

num tempo finito, digamos *T*? Mais uma vez – se aceitarmos a solução referida atrás, baseada no cálculo infinitesimal, que nos diz que a série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{2^n} = d$$

é convergente (por ser uma série geométrica de razão $0 < r = 1/2 < 1$), então percorrer essa infinidade de distâncias seria o mesmo que percorrer a distância *d* num tempo finito *T*. Portanto com velocidade (suposta constante) igual a $v \equiv d/T$. Cada um das distâncias seria percorrida com velocidade *v* e o tempo que demora a percorrer a distância $d/2^n$ seria $t_n = \frac{d/2^n}{d/T} = T/2^n$, cada vez mais pequeno e convergindo para zero. Zenão diria que a soma destas durações finitas teria que ser infinita e que portanto, só seria possível percorrer a infinidade de distâncias num tempo infinito (uma eternidade) o que prova a impossibilidade de movimento. Mas segundo o cálculo infinitesimal $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} T/2^n = T$ e não há contradição.

Aquiles e a Tartaruga.

Suponhamos que Aquiles (A) corre dez vezes mais rápido do que a Tartaruga (T), isto é, Aquiles corre 10 m/s enquanto que a Tartaruga corre apenas 1 m/s. Suponhamos ainda que a Tartaruga parte com 10m de avanço (FIGURA 3).

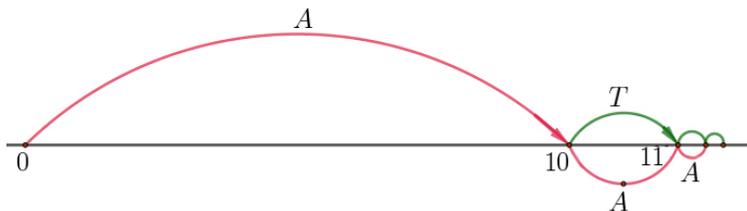


FIGURA 3. Aquiles e a Tartaruga.

A e T iniciam a corrida no mesmo instante, digamos, $t = 0$. Ao fim de 1 segundo, A alcança a posição de partida de T , situada no ponto (de abscissa) 10 e, durante esse segundo, a Tartaruga, T , avança 1 m, atingindo o ponto (de abscissa) 11. Agora A procura alcançar T , avançando 1 m, para atingir o ponto 11, ao fim de um intervalo de tempo igual a 0,1 s. Mas entretanto, nesse mesmo intervalo de tempo, a Tartaruga, T , avança 0.1m, atingindo o ponto 11,1.

O processo repete-se e Aquiles A nunca atingirá a Tartaruga T ! Mas, mais uma vez acreditando que A e T conseguem realizar um número infinito de tarefas do tipo descrito, em tempo finito, A atinge T , exatamente no ponto de abscissa:

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Percurso de Aquiles} & & \text{Série geométrica de razão } r = 1/10 \\
 \underbrace{10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots}_{\text{Percurso da Tartaruga}} & = & \underbrace{10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots}_{10 + \frac{1}{1-1/10}} \\
 & = & 10 + \frac{10}{9} = 11.111111\dots
 \end{array} \quad (1)$$

Mas isto é contra-intuitivo: como realizar um número infinito de tarefas em tempo finito? Para Zenão isto não é possível, como já vimos. Mas, se aceitarmos a consistência lógico-matemática do cálculo infinitesimal, isto só é possível se o tempo de duração das sucessivas tarefas convergir para zero. E com que "relógio" meço essa duração "infinitesimal"? Qualquer "relógio" físico tem uma precisão finita, embora possa ser extremamente pequena. À escala de Planck, essa precisão será igual ao chamado *Tempo de Planck* = $\tau_P = 5,39121 \times 10^{-44}$, o que significaria que teria que haver uma infinidade de tarefas com durações inferiores a τ_P . Mas ninguém tem dúvida— na realidade Aquiles atinge a Tartaruga!

Do istmo do Panamá à península da Flórida

entre vulcões e recifes de coral.

Luís Vítor Duarte

MARE | DCT-FCT/ U. Coimbra

São conhecidos os atributos paisagísticos do Caribe, entre a conjunção de pequenos territórios vulcânicos e carbonatados, rodeados por mar quente e azul turquesa e com vários denominadores comuns: desde logo, o idioma castelhano, que domina, uma biodiversidade extrema a começar na vegetação luxuriante, os répteis de todos os tamanhos e os recifes de coral. Mas, neste relato, não iremos a nenhuma das ilhas deste lado do mundo, apesar de serem bem convidativas. Ao invés, centramo-nos em dois dos seus extremos, que a geografia destaca no mapa mundo: o istmo do Panamá e a península da Flórida, com um saltinho às Bahamas (FIGURA 1). Morfologias continentais muito peculiares e que, considerando toda a idade da Terra, têm um historial geológico extraordinariamente recente.



FIGURA 1. O istmo do Panamá, a península da Flórida e as Bahamas no contexto do Caribe. Imagem do Google Earth.

Nesta crónica viajamos de sul para norte, e quase apetece que seja no sentido horário, de modo a passar pela Costa Rica e México, mas isso ficará para uma outra ocasião. Começamos, então, pelo Panamá, a menos de 10° acima da linha equatorial. E pelo lado meridional do canal artificial que dá nome ao país, que fica no estreito istmo, e que limita os dois maiores oceanos do planeta. Estes mares contrariam aqui a sua disposição geral, normalmente meridiana, com o Atlântico a sobrepor-se, latitudinalmente, ao Pacífico. Como é sabido e como veremos, muito por influência da tectónica de placas litosféricas. Estamos no país que deu nome a um chapéu, aos *Panama papers*, e onde foi rodado o filme *Alfaiate do Panamá*, com o inconfundível Geoffrey Rush, que, por coincidência, também já fez de Capitão Barbosa em *Piratas das Caraíbas*. Ótimos enquadramentos, num território de muito verde pois, por estas bandas, a pluviosidade é uma constante, com organismos voadores e rastejantes acima da média, símios curiosos e atrevidos, mas de muito bom trato, borboletas com todas as cores e padrões, e dos crocodilos que jamais “faltam à chamada”. De extrema abundância, já que é muito fácil conviver com esta panóplia de seres vivos, logo na primeira abordagem ao Canal do Panamá (FIGURA 2).



FIGURA 2. Particularidades do Canal do Panamá. A) Esclusa de Água Clara, na extremidade caribenha do canal, junto à cidade de Colón. B) O clássico comboio que liga as cidades de Colón e do Panamá, ou seja, entre os oceanos Atlântico e Pacífico, e que circula junto ao canal. C) *Cebus capucinus*, um dos muitos habitantes da região. D) Um dos outros habitantes do canal.

Não bastasse o contacto entre os dois oceanos, o Panamá desenha ainda a transição entre as duas opostas “Américas”, fazendo parte do que se convencionou, talvez sem grande sustentação geográfica, de América Central. Demasiados qualificativos para tão pequeno país. Geologicamente falando, a terra está cheia de vulcões e de evidências dessa atividade, bem adormecidos, cujo tempo de inatividade contribuiu para uma intensa cobertura vegetal. Mesmo assim, a geomorfologia pode dar uma boa ajuda no reconhecimento de alguns aparelhos vulcânicos (FIGURAS 3 e 4).



FIGURA 3. Os ensinamentos da geomorfologia: a caldeira vulcânica do Valle de Antón (provincia de Coclé). Um antigo vulcão do Neogénico escondido entre a imensa vegetação.

Do ponto de vista geodinâmico, estamos perante uma região de grande complexidade tectónica, onde confluem demasiadas placas litosféricas para tão exígua área do planeta. À volta do Panamá, identificam-se as placas da América do Sul, Caraíbas, Cocos e Nazca, e onde as zonas de subducção levam clara vantagem em relação aos limites distensivos de rifte. Mas a complexidade não fica por aqui, já que são vários os blocos de tendência compressiva que se desenvolvem entre as placas da América do Sul e das Caraíbas e as restantes duas placas do Pacífico, responsáveis por grande parte do relevo desta estreita faixa continental. Por isso, não é de estranhar que as evidências de natureza vulcânica sejam as dominantes, remontando as mais antigas ao Cretácico terminal. De tal ordem, que grande parte do registo sedimentar é feito somente a partir do final do Paleogénico. E quase sempre acompanhado por litologias

magmáticas extrusivas. Uma evolução geológica recente que conduziu à origem do istmo do Panamá. Não sendo exatamente consensual — e jamais o será, conhecendo os exercícios sustentados em fundamentos paleontológicos e isotópicos a que os geólogos são obrigados a fazer —, os vários estudos geológicos apontam para que a união por terra das duas américas se tenha concretizado, pelo menos nos últimos 3 milhões de anos. A ligação que proporcionou a migração dos organismos terrestres. E que nos permite chegar por terra à parte mais setentrional do Caribe.



FIGURA 4. Esboço geológico do aparelho vulcânico de Vale de Antón e composição química das suas águas termais (Poços termais do Vale de Antón).

Trespasado o canal, entre a capital do país e a muy latina ciudad de Colón — está bem de ver a origem do nome —, chegamos ao Caribe. Uma viagem que pode também ser realizada de comboio, seguramente das mais curtas de todas entre oceanos (FIGURA 2B)). A nordeste de Colón, banhada por águas bem mais quentes que as do Pacífico, encontra-se a cidade de Portobelo, rodeada de enseadas e de uma vegetação luxuriante. A paisagem é simplesmente fantástica. Neste pequeno povoado sobressaem alguns imóveis históricos como os Fortes de Santiago e de São Jerónimo, antigas praças espanholas, identificadas como Património Mundial pela UNESCO. Para manter o nível elevado, os espetaculares blocos de calcário recifal que se observam na construção destes fortes. Fácil de entender já que nas redondezas existem manchas cartográficas com recifes coralíferos de idade holocénica.

Damos então o salto até à Flórida. Curiosamente, uma viagem efetuada 9 anos antes da visita realizada ao Panamá. A uma espécie de paraíso dos Estados Unidos da América, devido a todo o contexto tropical que combina exposição solar, palmeiras e mar recifal. Apesar de ser um dos seus 50 estados, a ambiência não muda assim tanto relativamente à terra do General Noriega, a começar pelo idioma. Em especial, se andarmos pela *Little Havana* de Miami, sentiremos mesmo a atmosfera de Cuba, que até nem fica longe. Mas será só em espírito. Por essa razão, as memórias levam-nos a tantas películas de Hollywood centradas neste lugar que é, no mínimo, provocador. Mas, como o nosso foco é a geologia, a geomorfologia, a opção recai na série policial *CSI Miami* e, especificamente, no seu genérico. Onde se percebe que, para além da imensa zona costeira, uma das principais imagens de marca deste estado americano, grande parte da sua área é extraordinariamente rasa. Infinitamente rasa, se considerarmos que a Flórida apresenta uma área quase duas vezes superior à de Portugal, e o seu ponto mais elevado excede pouco mais de uma centena de metros. O que é aparentemente péssimo para a geologia e, em especial, para a análise estratigráfica, dada a limitação de afloramentos que possam ajudar a contar uma história geológica mais completa deste lado do planeta. Isto significa que a superfície dos terrenos da Flórida é ainda mais recente do que a do istmo do Panamá. Diríamos, um pouco mais, uma vez que as unidades mais antigas remontam ao Eocénico (~ 50 milhões de anos), sendo cada vez mais recentes à medida que migramos para sul. A diferença está em que as unidades geológicas na Flórida são inteiramente de origem sedimentar, acumuladas unicamente pela ação combinada dos efeitos do clima e das variações do nível do mar. Os limites das placas litosféricas estão bem longe pelo que confere à geologia a “simplicidade” que o Panamá não tem na hora da sua análise.

A prova da “juventude” das rochas pode ser testemunhada na Tocha da Amizade, em plena *downtown* de Miami (FIGURA 7). Um monumento muito curioso, dedicado aos diferentes povos americanos que ajudaram a construir a América, e também ao célebre presidente americano John Fitzgerald Kennedy. Excelentes e merecidas razões. Mas, como “cereja no topo do bolo”, são as impressionantes rochas de calcário recifal que dão corpo ao monumento. Não tão diferentes das de Portobelo, mas mais “limpinhas” e cortadas a preceito. O monumento também é recente. Uma surpresa, pela espetacularidade da rocha ornamental, cuja variabilidade pode converter-se num belo atlas de fósseis de corais.

As rochas da Tocha da Amizade provêm de algumas pequenas pedreiras existentes na região, refletindo a sedimentação carbonatada, que ocorreu em grande parte da Flórida, durante a fase mais quente que antecedeu a última glaciação plistocénica. Reportamo-nos aos cerca de 125 mil anos, registo resultante de uma fase de subida do nível do mar, que terá inundado uma parte significativa da atual Flórida, e que terá originado também as *Florida Keys*. Uma sucessão muito *sui generis* de ilhas coralíferas, que se dispõem paralelamente ao continente, em direção ao Golfo do México. São conhecidas pelas extensas pontes que as unem e que se sustentam sobre o Atlântico! Digno de ser visto para além da vasta lista de filmes aqui rodados. Convém lembrar, ainda, que o arquipélago das Bahamas está a curta distância. E que mereceu uma curta visita.

Quantum Entanglement.

A imagem representa um exemplo de Emaranhamento Quântico (*Quantum Entanglement*). Erwin Schrödinger (1887–1961, Nobel de Física, em 1933), um dos grandes criadores da mecânica quântica, notou algo peculiar na forma como se representam os estados dos sistemas quânticos e chamou a isso “emaranhamento”. Nas suas próprias palavras, descreveu esse fenómeno da seguinte forma:

“Consideremos dois sistemas quânticos, dos quais conhecemos os respetivos estados, representados pelas funções de onda, digamos, ϕ e ψ . Suponhamos que esses sistemas entram em interação física temporária um com o outro, por ação de forças conhecidas. Então, quando, após esse tempo de influência mútua, eles se separam de novo, não podem continuar a ser descritos da mesma forma, como o eram antes da interação. Passam a ser descritos por um novo estado (uma nova função de onda), como se ficassem interligados “para sempre” – pela interação os dois representantes (ou funções de onda ϕ e ψ) ficam emaranhados!”

Uma das descobertas mais perturbadoras do último meio século é que o universo não é localmente real. Neste contexto, “real” significa que os objetos têm propriedades definidas, independentes da observação (uma maçã pode ser vermelha mesmo se ninguém a observa), enquanto que “local” significa que os objetos só podem ser influenciados por outros que lhes

estão próximos e ainda que qualquer influência não pode viajar mais rápido do que a luz.

As investigações mais recentes, e experiências realizadas com fótons emaranhados, revelaram estes mistérios profundos nas fronteiras da física quântica. De facto, permitem concluir que esses dois atributos (real e local) não podem ser ambos verdadeiros – a evidência mostra que os objetos não são influenciados apenas pelo seu ambiente próximo e também que podem não ter propriedades bem definidas antes da medição. Isto é, obviamente, profundamente contrário às nossas experiências quotidianas. Como Albert Einstein uma vez disse a um amigo: “Você realmente acredita que a lua não está lá quando você não está a olhar?”

Os três físicos: John Clauser, Alain Aspect e Anton Zeilinger, dividiram igualmente o Prémio Nobel da Física de 2022, “pelas experiências realizadas com fótons emaranhados, estabelecendo a violação das chamadas desigualdades de Bell, e pelos seus contributos pioneiros para a ciência da informação quântica.” (*Desigualdades de Bell* referem-se ao trabalho pioneiro do físico John Stewart Bell (1928–1990) no início da década de 60 do século passado).



Casa das Ciências

2023



Prémios

A Casa das Ciências vai premiar os melhores recursos educativos e imagens submetidas no portal durante 2022.

Temos o prazer de o/ a convidar a estar presente na sessão de entrega dos **Prémios Casa das Ciências 2023**, onde serão conhecidos os vencedores. A sessão decorrerá dia **24 de novembro** às **14h30**, na **Biblioteca da Faculdade de Ciências da UP**.

Conheça todos os candidatos em casadasciencias.org.