REVISTA DE CIÊNCIA ELEMENTAR

Raízes de números complexos

João Nuno Tavares [*], Ângela Geraldo [†]
[*] Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
[†] CMUP/ Universidade do Porto
[*] jntavar@fc.up.pt

CITAÇÃO
Tavares, J.N., Geraldo, A. (2013)
Raízes de números complexos,
Rev. Ciência Elem., V1(01):062.
doi.org/10.24927/rce2013.062

EDITOR
José Ferreira Gomes,
Universidade do Porto

RECEBIDO EM
12 de novembro de 2012

ACEITE EM
06 de maio de 2013

PUBLICADO EM
06 de maio de 2013

rce.casadasciencias.org

As raízes de índice $n \in \mathbb{N}$ de um número complexo w são os números complexos z tais que $z^n = w$.

Portanto, calcular $\sqrt[n]{w}$ é equivalente a calcular os números complexos cuja potência de índice n seja igual a w.

Raízes de índice n

Determinar as raízes de índice $n \in \mathbb{N}$ de um número complexo w, ou seja calcular $\sqrt[n]{w}$ é então equivalente a determinar os números complexos z tais que:

$$z^n = w$$

Para isso consideramos os números complexos z e w na forma polar:

$$w = |w|\ cis\ \alpha$$
$$z = |z|\ cis\ \theta$$

Usando a fórmula de De Moivre temos então que

$$z^n = w \quad \Leftrightarrow \quad (|z|\ cis\ \theta)^n = |w|\ cis\ \alpha \quad \Leftrightarrow \quad |z|^n\ cis\ (n\theta) = |w|\ cis\ \alpha$$

Resolvendo a equação temos, atendendo à igualdade dos números complexos escritos na forma polar, que

$$|z|^n = |w| \implies |z| = \sqrt[n]{w} = |w|^{1/n}$$

e

$$n\theta = \alpha + 2k\pi \iff \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Portanto, as n raízes distintas de índice n de um número complexo $w = a + bi = |w|\ cis\ \alpha$ são dadas por:

$$z_k = |w|^{1/n}\ cis\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \text{ (1)},$$

logo têm o mesmo módulo pelo que pertencem à circunferência de centro na origem no referencial e raio $|z|=|w|^{1/n}$. Note-se ainda que a diferença entre os argumentos de duas raízes z_k e $z_k + 1$, $k = 0,1,2,\ldots,$ n-1, é $\frac{2k\pi}{n}$, logo, as n raízes situam-se nos vértices de um polígono regular de n lados inscritos na referida circunferência.

Exemplos

Raízes cúbicas de -1

Considerando w = -1 queremos então determinar $\sqrt[3]{-1}$, ou seja, encontrar os números complexos $z = |z|\ cis\ \theta$ tal que $z^3 = w$, isto é, z^3 = -1.

Para isso temos de escrever w = -1 na forma polar:

$$-1 = |w|\ cis\ \alpha \iff -1 = |w|\cos\alpha + i\,|w|\sin\alpha \iff$$
$$\iff |w|\cos\alpha = -1 \ \wedge\ |w|\sin\alpha = 0 \iff |w| = 1 \ \wedge\ \alpha = \pi$$

Portanto, $w = cis\pi$.

Aplicando a fórmula (1) obtemos três raízes cujo módulo é $|z| = \sqrt[3]{1} = 1$ e argumento $\theta_k = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0,\ 1,\ 2$, isto é,

$$|z| = 1 \ \wedge\ \left(\theta = \frac{\pi}{3} \ \vee\ \theta = \pi \ \vee\ \theta = \frac{5\pi}{3}\right)$$

As raízes cúbicas de −1 são então:

$$z_0 = \ cis\ \left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\,; \quad z_1 = \ cis\ \pi = -1\,; \quad z_3 = \ cis\ \left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

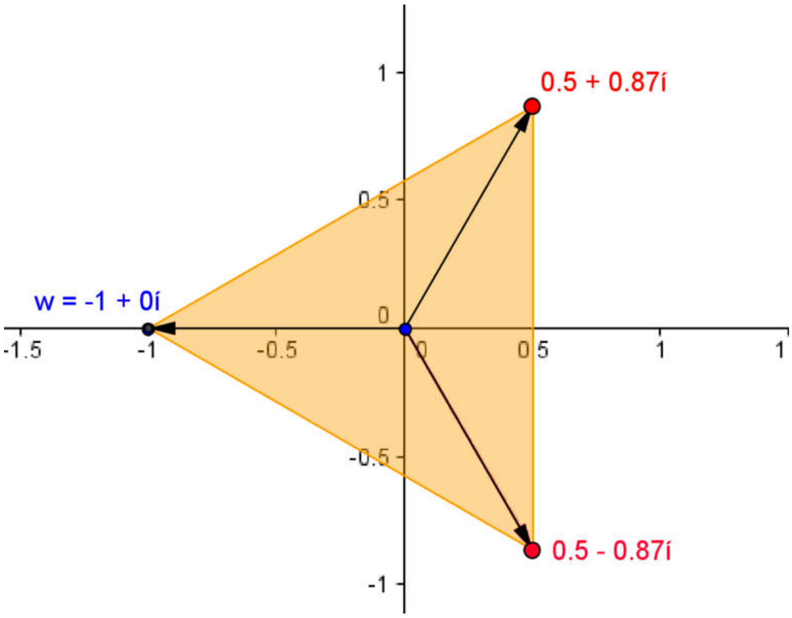

FIGURA 1. Raízes cúbicas de -1.

Raízes de índice 4 de $w = \sqrt{3} + i$

Considerando $w = \sqrt{3} + i$ pretendemos determinar $\sqrt[4]{\sqrt{3} + i}$, ou seja, encontrar os números complexos $z = |z|\ cis\ \theta$ tais que $z^4 = w$.

Mais uma vez precisamos de escrever w na sua forma polar:

$$\sqrt{3} + i = |w|\ cis\ \alpha \iff \sqrt{3} = |w| \cos\alpha \ \wedge\ 1 = |w| \sin\alpha \iff$$
$$\iff |w| = \frac{\sqrt{3}}{\cos\alpha} \ \wedge\ |w| = \frac{1}{\sin\alpha}$$
$$|w| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1} = \sqrt{4} = 2 \text{ e } \sqrt{3} + i = 2cis\alpha = 2\cos\alpha + 2i\sin\alpha$$

Então,

$$\begin{array}{l} 2\cos\alpha = \sqrt{3} \iff \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 2\sin\alpha = 1 \iff \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \end{array} \quad \text{donde } \alpha = \frac{\pi}{6}$$

Portanto, $w = 2\ cis\ \dfrac{\pi}{6}$.

Aplicando a fórmula (1) temos então que as raízes têm módulo $|z| = \sqrt[4]{2}$ e argumento $\theta_k = \frac{\pi/6}{4} + \frac{2k\pi}{4}$, $k = 0, 1, 2, 3$, isto é,

$$|z| = \sqrt[4]{2} \ \wedge\ \left(\theta = \frac{\pi}{24} \ \vee\ \theta = \frac{13\pi}{24} \ \vee\ \theta = \frac{25\pi}{24} \ \vee\ \theta = \frac{37\pi}{24}\right)$$

As raízes de índice 4 de $\sqrt{3} + i$ são, então:

$$z_0 = \sqrt[4]{2}\ cis\ \left(\frac{\pi}{24}\right) \cong 1,18 + 0,16i\,; \quad z_1 = \sqrt[4]{2}\ cis\ \left(\frac{13\pi}{24}\right) \cong -0,16 + 1,18i\,;$$
$$z_2 = \sqrt[4]{2}\ cis\ \left(\frac{25\pi}{24}\right) \cong -1,18 - 0,16i\,; \quad z_3 = \sqrt[4]{2}\ cis\ \left(\frac{37\pi}{24}\right) \cong 0,16 - 1,18i$$

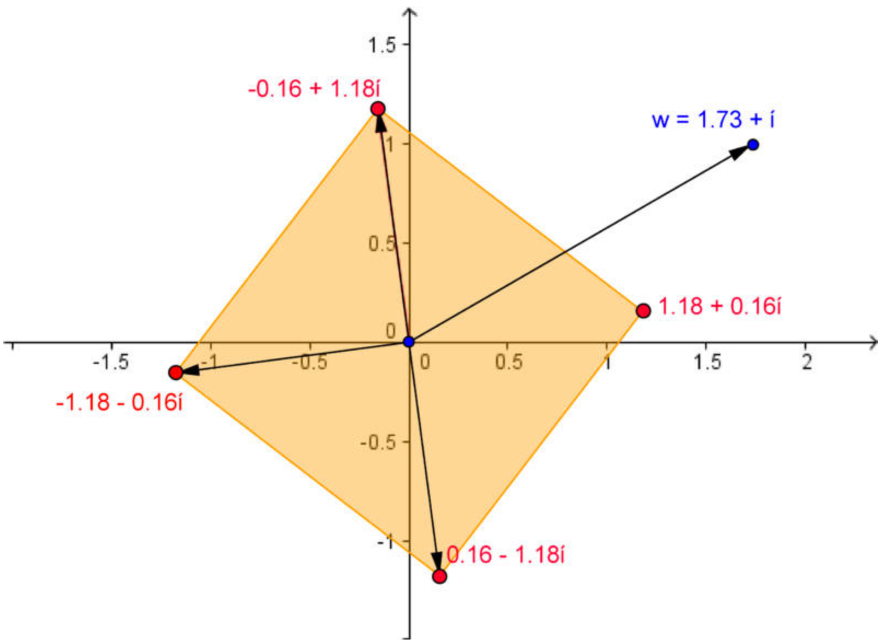

FIGURA 1.Raízes de índice 4 de $\sqrt{3} + i$