Lei dos senos

João Nuno Tavares [*], Ângela Geraldo [†]
[*] Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
[†] CMUP/ Universidade do Porto
[*] jntavar@fc.up.pt

CITAÇÃO
Tavares, J.N., Geraldo, A. (2014)
Lei dos senos,
Rev. Ciência Elem., V2(01):113.
doi.org/10.24927/rce2014.113

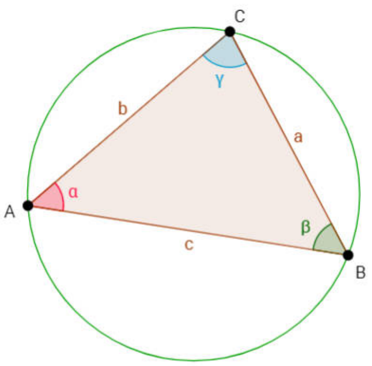
EDITOR
José Ferreira Gomes,
Universidade do Porto

RECEBIDO EM
07 de dezembro de 2012

ACEITE EM
12 de março de 2013

PUBLICADO EM
09 de abril de 2013

rce.casadasciencias.org



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

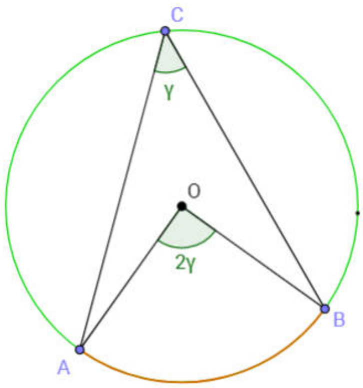
Consideremos um triângulo ABC, como o representado na imagem ao lado. As notações para os vértices e para as medidas de lados e de ângulos internos são as indicadas. Nestas condições, a **lei dos senos** diz que:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

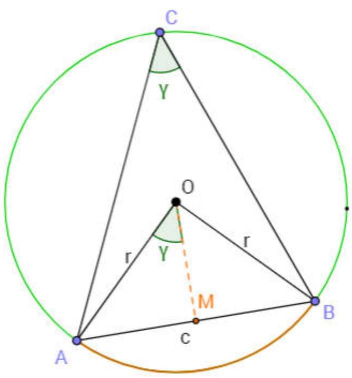
Podemos ainda ser mais específicos. Para isso, consideremos a circunferência circunscrita ao triângulo ABC, e seja r o seu raio. Então

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

Demonstração



Para provar a **lei dos senos**, usamos o facto conhecido (Proposição 20 do livro III dos *Elementos* de Euclides) de que a medida de um ângulo inscrito numa circunferência (isto é, um ângulo cujo vértice está sobre a circunferência e os lados contêm duas cordas da circunferência), é igual a metade da medida do ângulo ao centro (ou arco) que subtende a mesma corda ou metade da amplitude do arco AB.



$$c = AB = 2AM = 2r\sin\gamma$$

Consideremos de novo a circunferência circunscrita ao triângulo ABC, e seja r o seu raio.

Temos que: $\angle AOB = 2\,\angle ACB = 2\gamma$.

Baixemos, a partir de O, a perpendicular que bisseta o lado AB. Temos então que $\sin\gamma = \frac{c}{2}r$

o que implica que $\frac{c}{\sin\gamma} = 2r =$ constante

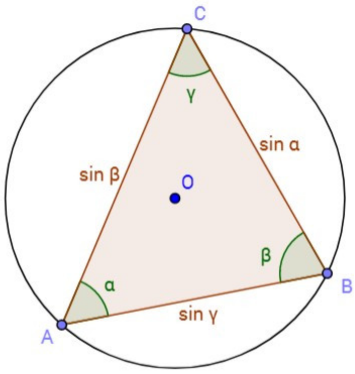
que é uma constante, constante esta que é independente de c e γ. Fazendo exatamente o mesmo procedimento para os dois outros lados e ângulos internos, obtemo

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

como se pretendia.

Aplicações

Aplicação 1



Diâmetro da circunferência é igual a 1

Num triângulo inscrito numa circunferência de diâmetro igual a 1, o comprimento de cada lado é igual ao seno do ângulo oposto.

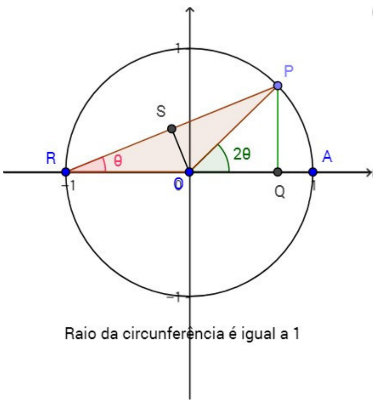
Com efeito, neste caso, a lei do senos diz que

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 1$$

donde se deduz que

$$a = \sin\alpha, b = \sin\beta \text{ e } c = \sin\gamma.$$

Fórmulas de duplicação



Raio da circunferência é igual a 1

Consideremos o triângulo ROP inscrito numa circunferência de raio igual a 1, que se ilustra na imagem ao lado. Se $\angle AOP = 2\theta$, então $\angle ARP = \theta$.

Aplicando a **lei dos senos** ao triângulo ROP, obtemos

$$\frac{RP}{\sin(180^{\circ} - 2\theta)} = \frac{OP}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta}$$

uma vez que $OP = 1$, donde se deduz que

$$\sin 2\theta = RP \ \sin\theta,$$

uma vez que

$$\sin(180^{\circ} - 2\theta) = \sin\theta.$$

Por outro lado, do triângulo RSO, retângulo em S, obtemos que

$$\cos\theta = \frac{RS}{RO} = \frac{(RP/2)}{1} = \frac{RP}{2},,$$

o que implica que

$$RP = 2\cos\theta.$$

Substituindo RP na fórmula $\sin 2\theta = RP \sin\theta$, acima deduzida, obtemos uma fórmula do seno do ângulo duplo:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

Fazendo um raciocínio análogo, aplicado agora ao triângulo RQP, retângulo em Q, obtemos as fórmulas do cosseno do ângulo duplo:

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$