REVISTA DE CIÊNCIA ELEMENTAR

Equações trigonométricas. Exemplos

João Nuno Tavares
CMUP/ Universidade do Porto

CATEGORIA
Artigo

CITAÇÃO
Tavares, J. N. (2023)
Equações trigonométricas. Exemplos,
Rev. Ciência Elem., V2(01):116.
doi.org/10.24927/rce2014.116

EDITOR
José Ferreira Gomes,
Universidade do Porto

RECEBIDO EM
09 de novembro de 2012

ACEITE EM
27 de dezembro de 2012

PUBLICADO EM
15 de setembro de 2014

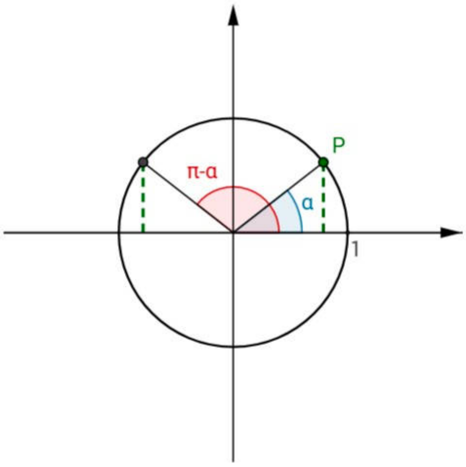
São equações numéricas envolvendo funções trigonométricas.

Do tipo $\sin x = \sin\alpha$

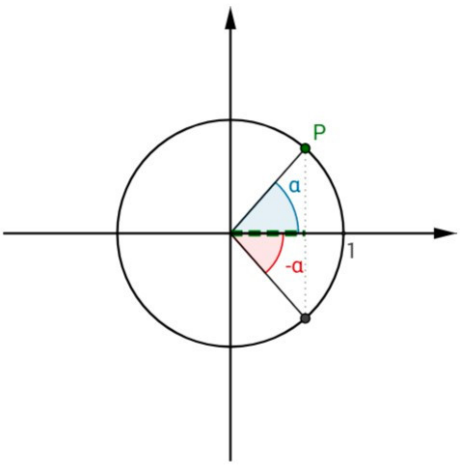
Considerando a aplicação ao lado podemos alterar a amplitude de α, movendo o ponto P, e verificar as soluções deste tipo de equação para qualquer ângulo α.

Facilmente se verifica que as soluções da equação $\sin x = \sin\alpha$ são:

$x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2kr$, com $k \in \mathbb{Z}$.



Do tipo $\cos x = \cos\alpha$



Considerando a aplicação podemos alterar a amplitude de α, movendo o ponto P, e verificar as soluções deste tipo de equação para qualquer ângulo α.

Facilmente se verifica que as soluções da equação $\cos x = \cos \alpha$ são:

$x = a + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

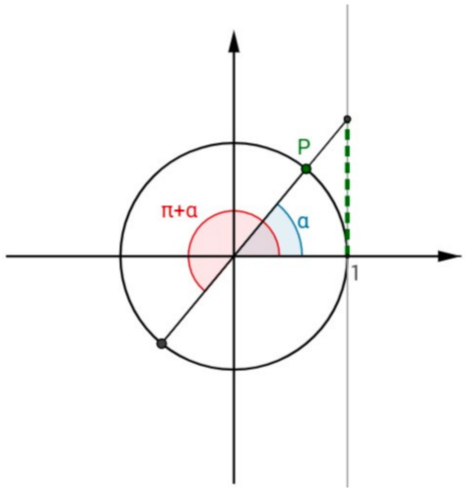
Ou de forma condensada $x = \pm\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Do tipo $\tan x = \tan \alpha$

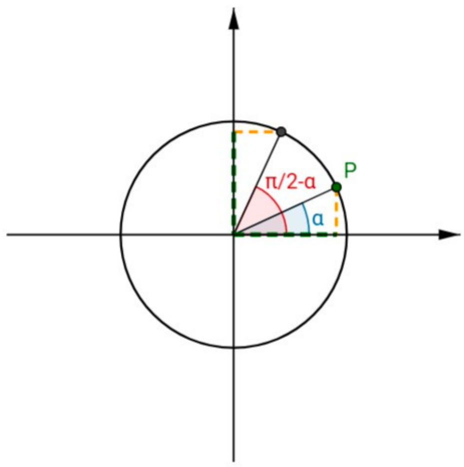
Considerando a aplicação ao lado podemos alterar a amplitude de α, movendo o ponto P, e verificar as soluções deste tipo de equação para qualquer ângulo α.

Facilmente se verifica que as soluções da equação $\tan x = \tan \alpha$ são:

$x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi + \alpha + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$



Do tipo $\sin x = \cos \alpha$ e $\cos x = \sin \alpha$



Considerando a aplicação podemos alterar a amplitude de α, movendo o ponto P, e verificar as soluções deste tipo de equação para qualquer ângulo α.

Facilmente se observa na aplicação que:

$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ e que $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

Portanto a resolução de uma equação do tipo $\sin x = \cos\alpha$ é equivalente à resolução da equação $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Usando o referido num dos pontos anteriores as soluções são:

$$x = \frac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + \alpha + 2k\pi\text{, com } k \in \mathbb{Z}.$$

Já a resolução de uma equação do tipo $\cos x = \sin\alpha$ é equivalente à resolução da equação $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Usando o referido num dos pontos anteriores as soluções são:

$$x = \frac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2k\pi\text{, com } k \in \mathbb{Z}.$$

Exemplos

$2\sin x - 1 = 0$

O primeiro passo será simplificar a equação:

$2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

A figura 1 esclarece o próximo passo: calcular as soluções da equação no intervalo $[0, 2\pi]$.

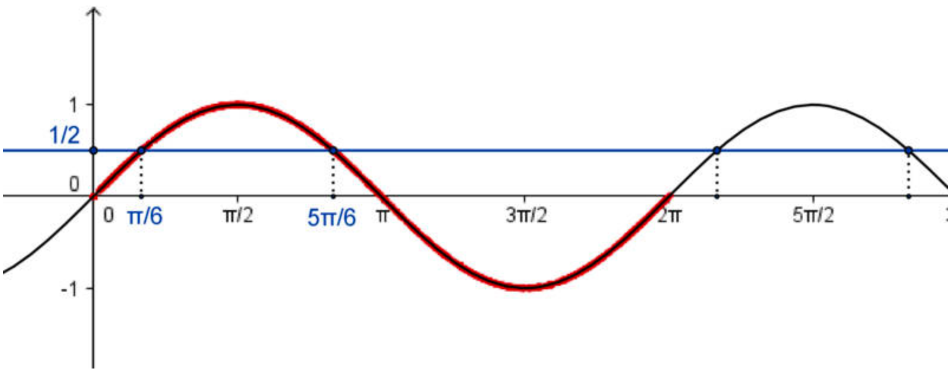


FIGURA 1. Raízes da equação $\sin x = \frac{1}{2}$.

Uma dessas soluções é $x = \frac{\pi}{6}$ pois, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Outra solução é $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ pois, $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Considerando agora a periodicidade da função seno, de período 2π, temos então todas as soluções da equação inicial:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\text{, com } k \in \mathbb{Z}.$$

$\sin 3x = \sin x$

Usando o que vimos anteriormente sobre equações do tipo $\sin x = \sin\alpha$ esta equação resolve-se facilmente: as soluções de $\sin 3x = \sin x$ são $3x = x + 2k\pi$ ou

$3x = \pi - x + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, $x = k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

$\cos 4x = \sin\left(\frac{\pi}{5} - x\right)$

Mais uma vez podemos usar o que vimos anteriormente, neste caso sobre as equações do tipo $\cos x = \sin\alpha$. Como já havíamos concluído $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ portanto:

$\cos 4x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right)$ ou seja, $\cos 4x = \sin\left(\frac{\pi}{5} - x\right)$ é equivalente a $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5} - x\right)$.

Ora, as soluções de $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5} - x\right)$ são $\frac{\pi}{2} - 4x = \frac{\pi}{5} - x + 2k\pi$ ou $\frac{\pi}{2} - 4x = \pi - \left(\frac{\pi}{5} - x\right) + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, obtemos todas as solução na forma:

$x = \frac{\pi}{10} - \frac{2k\pi}{3}$ ou $x = -\frac{3\pi}{50} - \frac{2k\pi}{5}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

$2\cos 3x + \sqrt{2} = 0$ no intervalo $\left]-\pi/4, \pi\right]$

Começamos por simplificar a equação trigonométrica,

$2\cos 3x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

A figura 2 mostra as duas soluções da equação no intervalo $\left]-2\pi, 2\pi\right[$ que são $3x = -\frac{3\pi}{4}$ e $3x = \frac{3\pi}{4}$, pois $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

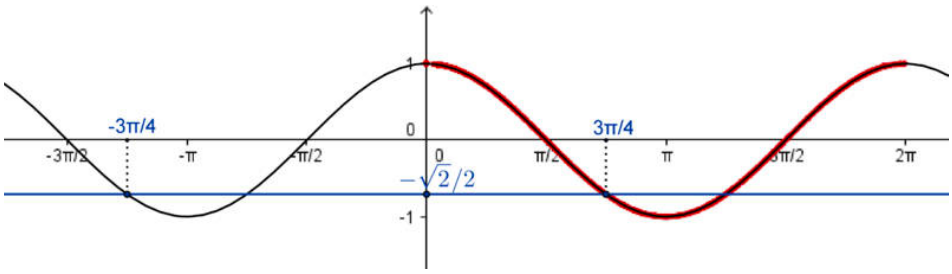


FIGURA 2. Raízes da equação trigonométrica $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ no intervalo $\left]-2\pi, 2\pi\right[$.

Assim, considerando a periodicidade da função cosseno, de período 2π, temos então todas as soluções da equação $3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$3x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $3x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, ou seja,

$x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Como queremos apenas determinar as raízes da equação trigonométrica no intervalo $\left]-\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ consideramos então alguns valores para k:

para $k = -1$, vem $x = -\frac{11\pi}{12}$ ou $x = -\frac{5\pi}{12}$, para $k = 0$, $x = -\frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{4}$, para $k = 1$, $x = \frac{5\pi}{12}$ ou $x = \frac{11\pi}{12}$, e para $k = 2$, $x = \frac{13\pi}{12}$ ou $x = \frac{19\pi}{12}$

Portanto, as soluções da equação trigonométrica inicial no intervalo $\left]-\frac{\pi}{4},\pi\right]$ são $x=\left\{\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right\}$.