Progressão aritmética

João Nuno Tavares
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

CITAÇÃO
Tavares, J.(2014)
Progressão aritmética,
Rev. Ciência Elem., V2(02):167.
doi.org/10.24927/rce2014.167

EDITOR
José Ferreira Gomes,
Universidade do Porto

RECEBIDO EM
25 de outubro de 2009

ACEITE EM
17 de dezembro de 2010

PUBLICADO EM
17 de dezembro de 2010

rce.casadasciencias.org

Uma progressão aritmética é uma sucessão de números reais un em que cada termo é obtido do anterior somando um número real fixo a que se chama razão:

$$u_1, u_2 = u_1 + r, u_3 = u_2 + r, \cdots, u_n = u_{n-1} + r, \cdots$$

Por outras palavras, uma sucessão (u_n),de números reais, é uma progressão aritmética se e só se a diferença entre dois termos consecutivos é constante. Esta constante r é a razão:

$$u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = \cdots = u_n - u_{n-1} = \cdots = r$$

Daqui se conclui que:

$$u_2 = \frac{u_1 + u_3}{2}, u_3 = \frac{u_2 + u_4}{2}, \cdots, u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} \cdots$$

Isto é, cada termo é a média aritmética dos dois termos vizinhos imediatos.

Exemplos:

- $1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots$ é a progressão aritmética de razão 1 e o u_1=1
- $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \cdots, \frac{n}{2}$ é a progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$ e o u_1= $\frac{1}{2}$

Nota

Se considerarmos r=0 obtemos a sucessão constante em que $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = \cdots$

Como se calcula a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética de razão r ?

Seja $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n$ a soma pretendida dos n primeiros termos. Note que:

$$\begin{gathered} u_1=u_1 \\ u_2=u_1+r \\ u_3=u_2+r=u_1+2r \\ \vdots \\ u_n=u_{n-1}+r=u_1+(n-1)r \end{gathered}$$

Escrevemos agora a soma S_n de duas formas:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n$$

e

$$S_n = u_n + u_{n-1} + u_{n-3} + \cdots u_2 + u_1$$

Somando termo a termo vem:

2Sn= $(u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + \cdots + (u_{n-1} + u_2) + (u_n + u_1)$

$$(u_1 + u_n) + (u_1 + r + u_n - r) + (u_n - r +_1 + r) + (u_n + u_1)$$

$$(u_1 + u_n) + (u_1 + u_n) + \cdots + (u_n + u_1) + (u_n + u_1)$$

$$n(u_1 + u_n)$$

Portanto:

$$S_n = nu_1 + r \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

Substituindo u_n=u_1+(n-1)r, obtemos uma outra fórmula para a soma:

$$S_n = nu_1 + r \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

Exemplos:

- A soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots$ é $S_n = n \cdot \frac{1+n}{2}$ ou $S_n = n \cdot 1 + r \cdot \frac{n(n+1)}{2}$. Em particular, $S_{100} = 1 + 2 + \cdots + 100 = 100 \cdot \frac{100+1}{2} = 5050$.

Curiosidades

Conta-se que o matemático Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), com sete anos, respondeu ao seu professor, que pedira aos alunos que somassem os números inteiros de um a cem, logo que este acabara de enunciar a questão, chegando ao resultado com o seguinte raciocínio:

1+100=101

2+99=101

3+98=101

$\vdots$

100+1=101

logo, o resultado procurado é $100 \times \frac{101}{2} = 5050$.