

Progressão geométrica

CITAÇÃO

Tavares, J. N. (2014)
Progressão geométrica,
Rev. Ciência Elem., V2(04):319.
doi.org/10.24927/rce2014.319

EDITOR

José Ferreira Gomes,
Universidade do Porto

RECEBIDO EM

14 de janeiro de 2010

ACEITE EM

16 de maio de 2012

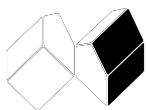
PUBLICADO EM

31 de dezembro de 2014

COPYRIGHT

© Casa das Ciências 2014.
Este artigo é de acesso livre,
distribuído sob licença Creative
Commons com a designação
[CC-BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/), que permite
a utilização e a partilha para fins
não comerciais, desde que citado
o autor e a fonte original do artigo.

rce.casadasciencias.org



João Nuno Tavares
CMUP/ Universidade do Porto

Uma progressão geométrica é uma sucessão de números reais u_n , não nulos, em que cada termo é obtido do anterior multiplicando-o por um número real fixo a que se chama razão:

$$u_1, u_2 = u_1 \cdot r, u_3 = u_2 \cdot r, \dots, u_n = u_{n-1} \cdot r, \dots$$

Por outras palavras, uma sucessão (u_n) , de números reais não nulos, é uma progressão geométrica se e só se a razão (ou quociente) entre dois termos consecutivos é constante. Esta constante $r, r \neq 0$, é a razão:

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \dots = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \dots = r$$

Isto é, cada termo é a média geométrica dos dois termos vizinhos imediatos:

$$u_2 = \pm\sqrt{u_1 \cdot u_3}, u_3 = \pm\sqrt{u_2 \cdot u_4}, u_4 = \pm\sqrt{u_3 \cdot u_5}, \dots, u_n = \pm\sqrt{u_{n-1} \cdot u_{n+1}}, \dots$$

Exemplos:

- $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$ é a progressão geométrica de razão $r = \frac{1}{2} < 1$ e $u_1 = \frac{1}{2}$.
- $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$ é a progressão geométrica de razão $r = -1$ e $u_1 = 1$.

Como se calcula a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $r \neq 1$?

Seja $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n$ a soma pretendida.

Note que:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1 \\ u_2 &= u_1 \cdot r \\ u_3 &= u_2 \cdot r = u_1 \cdot r^2 \\ &\vdots \\ u_n &= u_{n-1} \cdot r = u_1 \cdot r^{n-1} \end{aligned}$$

Consideremos agora a soma S_n :

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n \\ &= u_1 + ru_1 + r^2u_1 + \dots + r^{n-1}u_1 \\ &= u_1(1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}) \end{aligned}$$

Multipliquemos ambos os membros por r

$$rS_n = u_1(r + r^2 + r^3 + \dots + r^n)$$

e, finalmente, subtraímos membro a membro, para obter:

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= u_1(1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}) - u_1(r + r^2 + r^3 + \dots + r^n) \\ &= u_1(1 - r^n) \end{aligned}$$

Portanto, se $r \neq 1$, vem finalmente que:

$$S_n = u_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Exemplo

A soma dos n primeiros termos da progressão geométrica $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$, é

$$S_n = \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

NOTA

- Se considerarmos $r=0$, obtemos a sucessão em que $u_2 = \dots = u_n = \dots = 0$, que se pode considerar uma progressão geométrica degenerada. A soma dos n primeiros termos da respectiva sucessão é $S = u_1$.
- Se considerarmos $r=1$, obtemos a sucessão constante em que $u_1 = u_2 = \dots = u_n = \dots$, que é uma progressão aritmética de razão nula. A soma dos n primeiros termos da respectiva sucessão é $S = nu_1$.
- Notemos que se $|r| \leq 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = 0$ pelo que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{u_1}{1 - r}$