Progressão geométrica

João Nuno Tavares
CMUP/ Universidade do Porto

CITAÇÃO
Tavares, J. N. (2014)
Progressão geométrica,
Rev. Ciência Elem., V2(04):319.
doi.org/10.24927/rce2014.319

EDITOR
José Ferreira Gomes,
Universidade do Porto

RECEBIDO EM
14 de janeiro de 2010

ACEITE EM
16 de maio de 2012

PUBLICADO EM
31 de dezembro de 2014

rce.casadasciencias.org

Uma progressão geométrica é uma sucessão de números reais u_n, não nulos, em que cada termo é obtido do anterior multiplicando-o por um número real fixo a que se chama razão:

$$u_1,\ u_2=u_1\cdot r, u_3=u_2\cdot r,\cdots u_n=u_n-1\cdot r,\cdots$$

Por outras palavras, uma sucessão (u_n), de números reais não nulos, é uma progressão geomética se e só se a razão (ou quociente) entre dois termos consecutivos é constante. Esta constante r,r≠0, é a razão:

$$\frac{u_2}{u_1}=\frac{u_3}{u_2}=\frac{u_4}{u_3}=-\cdots=\frac{u_{n+1}}{u_n}=\cdots=r$$

Isto é, cada termo é a média geométrica dos dois termos vizinhos imediatos:

$$u_2=\pm\sqrt{u_1\cdot u_3},\ u_3=\pm\sqrt{u_2\cdot u_4},\ u_4=\pm\sqrt{u_3\cdot u_5},\cdots,\ u_n=\pm\sqrt{u_{n-1}\cdot u_{n+1}},\cdots$$

Exemplos:

- $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$ é a progressão geométrica de razão $r=\frac{1}{2}<1$ e $u_1=\frac{1}{2}$.
- $1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n-1}\cdots$ é a progressão geométrica de razão $r=-1$ e $u_1=1$.

Como se calcula a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão r≠1?

Seja $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{n-1}+u_n$ a soma pretendida.

Note que:

$$\begin{array}{lcc} u_1 & = & u_1 \\ u_2 & = & u_1\cdot r \\ u_3 & = & u_2\cdot r=u_1\cdot r^2 \\ \vdots & & \vdots \\ u_n & = & u_{n-1}\cdot r=u_1\cdot r^{n-1} \end{array}$$

Consideremos agora a soma S_n:

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n \\ &= u_1 + ru_1 + r^2u_1 + \cdots + r^{n-1}u_1 \ ) \\ &= u_1(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}) \end{aligned}$$

Multipliquemos ambos os membros por r

$$rS_n = u_1(r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n)$$

e, finalmente, subtraíamos membro a membro, para obter:

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= u_1(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}) - u_1(r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n) \\ &= u_1(1 - r^n) \end{aligned}$$

Portanto, se $r \neq 1$, vem finalmente que:

$$S_n = u_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Exemplo

A soma dos n primeiros termos da progressão geométrica $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$, é

$$S_n = \frac{1}{2}\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

NOTA

- Se considerarmos r=0, obtemos a sucessão em que $u_2 = \cdots = u_n = \cdots = 0$, que se pode considerar uma progressão geométrica degenerada. A soma dos n primeiros termos da respetiva sucessão é $S = u_1$.
- Se considerarmos r=1, obtemos a sucessão constante em que $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = \cdots$, que é uma progressão aritmética de razão nula. A soma dos n primeiros termos da respetiva sucessão é $S = nu_1$.
- Notemos que se $|r| \leq 1$ $\lim_{n \to +\infty} r^n = 0$ pelo que $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{u_1}{1 - r}$