# Polígonos regulares

João Nuno Tavares, Ângela Geraldo
CMUP/ Universidade do Porto

**CITAÇÃO**
Tavares, J. N., Geraldo, A.(2014)
Polígonos regulares,
*Rev. Ciência Elem.*, V2(03):323.
doi.org/10.24927/rce2014.323

**EDITOR**
José Ferreira Gomes,
Universidade do Porto

**RECEBIDO EM**
15 de maio de 2012

**ACEITE EM**
18 de maio de 2012

**PUBLICADO EM**
30 de setembro de 2014



**rce.casadasciencias.org**

**Um polígono diz-se regular se tiver todos os seus lados e ângulos iguais.**

### Circunferências inscrita e circunscrita

Cada polígono regular $P_n$, de n lados, admite uma única circunferência circunscrita $P$, que passa em todos os n vértices do polígono. O centro da circunferência $C$ chama-se o centro do polígono $P_n$.

Cada polígono regular $\mathrm{Pn}$, de n lados, admite uma única circunferência inscrita $\mathrm{L}$, que é tangente a cada um dos lados do polígono. O ponto de tangência com um lado é o ponto médio desse lado. O centro da circunferência $\mathrm{L}$ coincide com o centro do polígono $\mathrm{P_n}$.

O raio da circunferência circunscrita $\mathrm{C}$ chama-se o raio do polígono $\mathrm{P_n}$, enquanto que o raio da circunferência inscrita $\mathrm{L}$ chama-se o apótema do polígono $\mathrm{P_n}$.

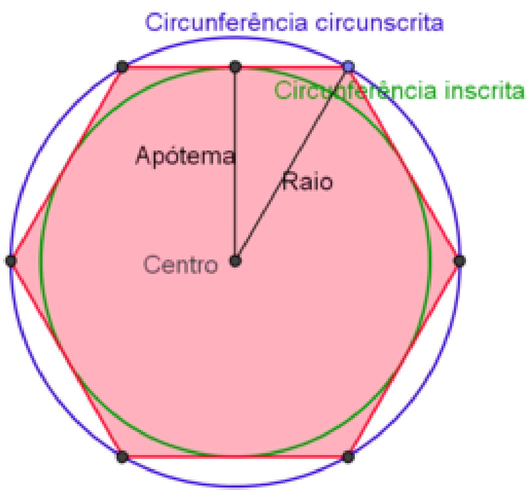
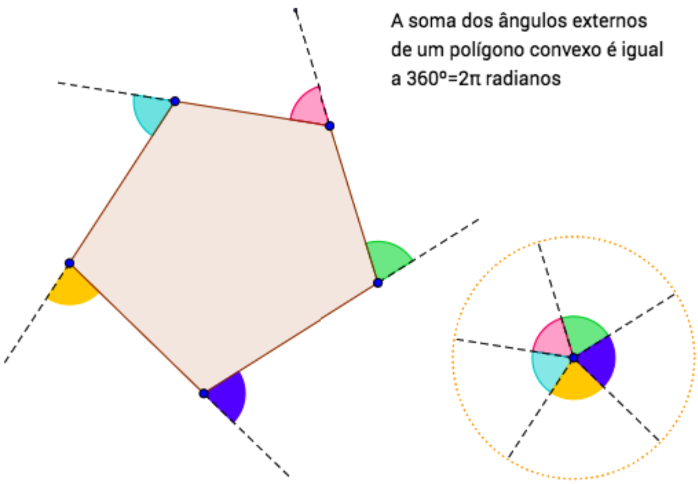



FIGURA 1. Circunferências inscrita e circunscrita.

### Soma dos ângulos externos e internos

A soma das medidas dos ângulos externos $\theta_i, i=1,\dots,n$ de um polígono convexo (regular ou não) de n lados, é igual a 360º ou $2\pi$ radianos. A prova está sugerida no applett ao lado cuja interpretação é clara.

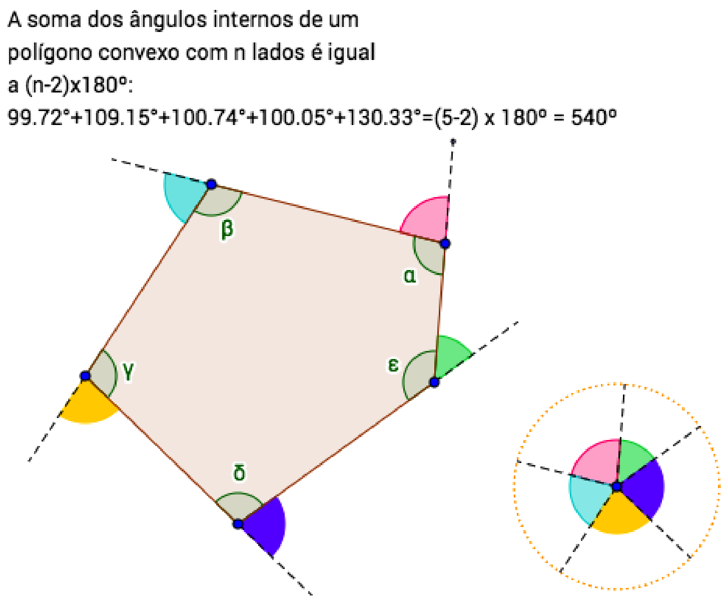
Octógono




Como, em cada vértice $i=1,\ldots,n$, de um polígono convexo (regular ou não) de n lados, cada ângulo interno $\alpha_i$ é igual a (180º - medida do correspondente ângulo externo $\theta_i$, vem que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i &= \sum_{i=1}^{n} (190^o - \theta_i) \\ & n180^o - \sum_{i=1}^{n} \theta_i \\ & n180^o - 360^o = (n-2)\,180^o \end{aligned}$$

Concluindo: a soma dos ângulos internos $\alpha_i, i=1,\ldots,n$ de um polígono convexo (regular ou não) de n lados, é igual a (n−2)180º ou (n−2)π radianos.



Perímetro e área

Seja $P_n$ um polígono regular de raio r, com de n lados. O raio da circunferência circunscrita é pois igual a r. A que é igual o comprimento $a_n$ do lado de polígono?

Pela figura ao lado, vemos que $\frac{a_n}{2} = r\ sin\frac{\pi}{n}$ (o triângulo ACE é retângulo) e portanto

$$\text{Perímetro}\,(P_n) = 2nr\ sin\frac{\pi}{n}$$

Por outro lado, o apótema CE de $P_n$ é igual a $rcos\frac{\pi}{n}$. Portanto, a área do triângulo ACB é igual a $\frac{(\text{base x altura})}{2}$, isto é, é igual a $\frac{a_n \text{ x apotema}}{2}$ ou, ainda, $r^2 sin\frac{\pi}{n}cos\frac{\pi}{n} = \frac{1}{2}r^2 sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

Como existem ao todo n triângulos iguais que preenchem o polígono dado, a sua área é

$$Area\,(P_n) = \frac{1}{2}nr^2 sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$