REVISTA DE CIÊNCIA ELEMENTAR

Potênciais de números complexos (de expoente natural)

João Nuno Tavares, Ângela Geraldo
CMUP/ Universidade do Porto

CITAÇÃO
Tavares, J. N., Geraldo, A.(2014)
Portênciais de números complexos (de expoente natural),
Rev. Ciência Elem., V2(03):325.
doi.org/10.24927/rce2014.325

EDITOR
José Ferreira Gomes,
Universidade do Porto

RECEBIDO EM
15 de maio de 2012

ACEITE EM
18 de maio de 2012

PUBLICADO EM
30 de setembro de 2014

As potências de expoente natural (inteiro positivo) de um número complexo z são os números complexos w tais que $w=z^n$ com $n \in \mathbb{N}$.

Potências de i

Sabemos que i, unidade imaginária, é uma solução da equação $x^2+1=0$, sendo $i=\sqrt{-1}$. Portanto, as primeiras potências de i correspondem a

$$
\begin{aligned}
i^2 &= -1\\
i^3 = i^2 \times i &= -1 \times i = -i\\
i^4 &= \left(i^2\right)^2 = (-1)^2 = 1\\
i^5 &= i^4 \times i = 1 \times i = i\\
i^6 &= \left(i^2\right)^3 = (-1)^3 = 1\\
i^7 = i^6 \times i &= -1 \times i = -i\\
i^8 &= \left(i^4\right)^2 = -1
\end{aligned}
$$

Considerando $n \in \mathbb{N}$ (n inteiro positivo), facilmente se prova que as potências de i de expoente superior a 3 são dadas por:

$$i^{4k} = 1$$

$$i^{4k+1} = i$$

$$i^{4k+2} = -1$$

$$i^{4k+3} = -i$$

- Atenção

$$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \neq \sqrt{(-1) \times (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = i \times i = i^2 = -1$$

Potências de números complexos

Forma algébrica

Considerando z um número complexo representado na sua forma algébrica, $z = a + bi$, com a e $b \in \mathbb{R}$, calculamos as potências de z de expoente natural do seguinte modo:

$$z^2 = (a+bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2 i^2 = a^2 + 2abi - b^2 = \left(a^2 - b^2\right) + (2ab)\, i$$

$$z^3 = z^2 \cdot z = \left(a^2 - b^2 + 2abi\right) \cdot (a+bi) = a^3 - ab^2 + 2a^2bi - b^3 i + 2ab^2 i^2 = a^3 - 3ab^2 + 3a^2bi - b^3 i = \left(a^3 - 3ab^2\right) + \left(3a^2b - b^3\right) i$$

$$z^4 = z^2 \cdot z^2 = \left(a^2 - b^2 + 2abi\right) \cdot \left(a^2 - b^2 + 2abi\right) = a^4 - a^2b^2 + 2a^3bi - b^2a^2 + b^4 - 2ab^3 i + 2a^3bi - 2ab^3 i + 4a^2b^2 i^2$$

$$= a^4 - 6a^2b^2 + 4a^3bi - 4ab^3 i + b^4 = \left(a^4 - 6a^2b^2 + b^4\right) + \left(4a^3b - 4ab^3\right) i$$

$\vdots$

Recorrendo ao Binómio de Newton podemos calcular as potências de expoente natural de qualquer número complexo da seguinte forma:

$$(a+bi)^n = \binom{n}{0} a^n \cdot (bi)^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot (bi)^1 + \quad \ldots \quad + \binom{n}{n} a^0 \cdot (bi)^n$$

onde $\binom{n}{0}$ são os coeficientes binomiais, *n* e *k* inteiros, *k*≤*n*, definidos como, $\binom{k}{0} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Forma polar

Considerando agora um número complexo z representado na forma polar, $z = |z|\, cis\,(\alpha) = |z|\, (cos\alpha + i\ sin\ \alpha) = e^{i\alpha}$ (fórmula de Euler). Podemos calcular as potências de z:

$$z^2 = (|z|\, cis\,(\alpha)) \cdot (|z|\, cis\,(\alpha)) = |z|^2\, cis\,(2\alpha)$$

$$z^3 = z^2 \cdot z = \left(|z|^2\, cis\,(2\alpha)\right) \cdot \left(|z|^3\, cis\,(3\alpha)\right) |z|^3\, cis\,(3\alpha)$$

$\vdots$

$$z^n = (|z|\, cis\,(\alpha))^n = |z|^n\, cis\,(n\alpha)$$

através da fórmula de De Moivre $(cis\,(\alpha))^n = cis\,(n\alpha)$

Determinar potências de números complexos (*applet*)

Potências de números complexos (fórmula de De Moivre).

Escolha o número complexo z movendo o ponto a azul. Em seguida clique no botão play para ver as sucessivas potências de z.

Qual a diferença de comportamento da sucessão $(z^n)_{n=1,2,...}$,

(i). quando $|z| < 1$, isto é, quando z está dentro do círculo unitário centrado na origem,

(ii). quando $|z| = 1$, isto é, quando z está sobre a circunferência unitária centrada na origem, e

(iii). quando $|z| > 1$, isto é, quando z está fora do círculo unitário centrado na origem?