Derivadas das funções trigonométricas

João Nuno Tavares, Ângela Geraldo
CMUP/ Universidade do Porto

CITAÇÃO
Tavares, J. N., Geraldo, A.(2014)
Derivadas das funções trigonométricas,
Rev. Ciência Elem., V2(03):326.
doi.org/10.24927/rce2014.326

EDITOR
José Ferreira Gomes,
Universidade do Porto

RECEBIDO EM
15 de maio de 2012

ACEITE EM
18 de maio de 2012

PUBLICADO EM
30 de setembro de 2014

COPYRIGHT
© Casa das Ciências 2014.
Este artigo é de acesso livre, distribuído sob licença Creative Commons com a designação CC-BY-NC-SA 4.0, que permite a utilização e a partilha para fins não comerciais, desde que citado o autor e a fonte original do artigo.

rce.casadasciencias.org

Conceito de derivada

Recordemos que, dada uma função real de variável real $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, definida num intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$, define-se a derivada de f num ponto $x \in I$, através do limite (se existir)

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Nesta fórmula $h \neq 0$ deve ser suficientemente pequeno para que $x + h \in I$.

Derivada da função sin

Quando a variável x é expressa em radianos

Vamos usar a fórmula $sinp - sinq = 2cos\frac{p+q}{2}sin\frac{p-q}{2}$, válida quer p e q sejam expressos em graus ou radianos.

Suponhamos que x e h são ambos expressos em radianos. Vem, então, usando os Limites notáveis que

$$\begin{aligned} sin'(x) = \frac{d\,sin}{dx}(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{sin(x+h) - sin\,x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2cos\left(x + \frac{h}{2}\right) sin\frac{h}{2}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0}\ cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \lim_{h \to 0} \frac{sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\ &= (cos\ x) \times 1 \end{aligned}$$

Concluindo,

$$sin'(x) = \frac{d\,sin}{dx}(x) = cos\ x$$

Mas atenção que esta fórmula é válida apenas quando x e h são ambos expressos em radianos. Só assim é que conseguimos garantir $\lim\limits_{h\to 0}\frac{sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=1$.

Quando a variável x é expressa em graus

Vamos usar de novo a fórmula $sin\ p - sin\ q = 2cos\frac{p+q}{2}sin\frac{p-q}{2}$, válida quer p e q sejam expressos em graus ou radianos.

Suponhamos que x e h são ambos expressos em graus. Vem, então, que

$$
\begin{aligned}
&sin'\left(x^o\right) = \frac{d\ sin}{dx}\left(x^o \to 0\right) = \lim\limits_{h^0}\frac{sin\left(x^o+h^o\right)-sin\ x^o}{h^o} \\
&= \lim\limits_{h^o\to 0}\frac{2cos\left(x^o+\frac{h^o}{2}\right)sin\frac{h^o}{2}}{h^o} \\
&= \lim\limits_{h^o\to 0} cos\left(x^o+\frac{h^o}{2}\right)\lim\limits_{h^o\to 0}\frac{sin\frac{h^o}{2}}{\frac{h^o}{2}} \\
&= \left(cos\ x^o\right)\times\frac{\pi}{180^o}
\end{aligned}
$$

Concluindo,

$$sin'\left(x^o\right) = \frac{d\ sin}{dx}\left(x^o\right) = \frac{\pi}{180^o}cos\ x^o$$

já que, como vimos nos Limites notáveis, quando h é expresso em graus

$$\lim\limits_{h\to 0}\frac{sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \frac{\pi}{180^o}$$

Note que este resultado é bem mais complicado do que o anterior, devido ao aparecimento do factor extra $\frac{\pi}{180^o}$. Por isso há toda a conveniência em exprimir x em radianos, para que a derivada tenha uma expressão mais simples:

$$sin'\left(x\right) = cos\ x$$

Derivada da função cos

Consideremos a variável x expressa em radianos.

Podemos fazer uma dedução direta, usando a definição de derivada, e cálculos em tudo análogos aos que foram feitos para calcular a derivada de sin, quando x e h são ambos expressos em radianos. O resultado é

$$cos'\left(x\right) = -sin\ x$$

No entanto, é mais simples usar relações trigonométricas e a regra de derivação de função composta (regra da cadeia). Usamos, por exemplo, a relação trigonométrica

$x = sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Vem então que

$$cos'\left(x\right) = -sin'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -sin\ x$$

Derivada da função tan

Usamos a regra de derivação de um quociente $\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, desde que as derivadas existam e o quociente faça sentido (aqui usámos óbvias simplificações de notação). Como tan$x = \frac{sin\ x}{cos\ x}$, vem, com $x \neq \left(2k+1\right), k \in \mathbb{Z}$, que

$$tan'x = \left(\frac{sin\ x}{cos\ x}\right)' = \frac{sin'\left(x\right)cos\left(x\right) - sin\left(x\right)cos'\left(x\right)}{cos^2\left(x\right)} = \frac{cos^2\left(x\right) + sin^2\left(x\right)}{cos^2\left(x\right)} = \frac{1}{cos^2\left(x\right)} = sec^2\left(x\right)$$