REVISTA DE CIÊNCIA ELEMENTAR

Pi (π)

João Nuno Tavares[1],
Ângela Geraldo
CMUP/ Universidade do Porto
[1] jntavar@fc.up.pt

CITAÇÃO
Tavares, JN, Geraldo, A (2017) Pi,
Rev. Ciência Elem., V5(01):004.
doi.org/10.24927/rce2017.004

EDITOR
José Ferreira Gomes,
Universidade do Porto

RECEBIDO EM
12 de fevereiro de 2017

ACEITE EM
24 de março de 2017

PUBLICADO EM
31 de março de 2017

rce.casadasciencias.org

O número π define-se através de

$$\pi = \frac{\text{perímetro de uma circunferência}}{\text{diâmetro dessa circunferência}}$$

A definição anterior tem uma dificuldade — como se define o perímetro de uma circunferência? No seu livro "Medição de um círculo", Arquimedes mostrou que tem um valor situado entre $3\frac{10}{71}$ e $3\frac{10}{70}$. A ideia é encaixar a circunferência entre polígonos regulares, respetivamente inscritos e circunscritos, com um número de lados cada vez maior.

A figura 1A mostra uma circunferência de raio 1, e um polígono regular inscrito com *n* lados (na figura *n*=5). s_n= *AB* = comprimento de um lado desse polígono. D bisseta o arco AB e portanto s_{2n}= AD = DB = comprimento de um lado de um polígono regular inscrito com *2n* lados.

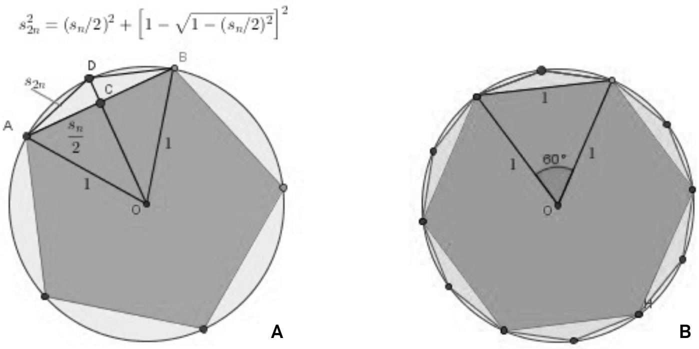

FIGURA 1. Polígonos regular inscritos numa circunferência.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ACD, retângulo em C, obtemos

$$s_{2n}^2 = AD^2 = AC^2 + CD^2 = AC^2 + (OD - OC)^2 = \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 + (1 - OC)^2$$

Uma segunda aplicação do teorema de Pitágoras, desta vez ao triângulo ACO, retângulo em C, dá

$$OC = \sqrt{OA^2 - AC^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}$$

Substituindo na primeira equação e fazendo alguns cálculos simples obtemos então (verifique)

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$$

o que nos permite calcular s_{2n} à custa de s_n.

Se agora fizermos n=6 (um hexágono regular inscrito), sabemos que s_6=1 (figura 1B). Aplicando sucessivamente a fórmula anterior, e após alguns cálculos simples, vem que

$$\begin{aligned} s_{12} &= \sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ s_{24} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \\ s_{48} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \\ s_{96} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} \end{aligned}$$

e assim sucessivamente.

O perímetro de um polígono regular de 96 lados, inscrito numa circunferência de raio 1, é pois igual a $96 \times s_{96}$ o que dá uma boa aproximação do perímetro dessa circunferência. Como

$$\pi = \frac{\text{perímetro de uma circunferência}}{\text{diâmetro dessa circunferência}}$$

obtemos a seguinte aproximação de π

$$\pi \approx 48\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} \approx 3.14103 \approx 3\frac{10}{71}$$

Arquimedes repetiu o mesmo argumento, agora para uma sequência de polígonos regulares circunscritos de 6, 12, 24, 48 e 96 lados. O leitor poderá deduzir a fórmula seguinte (veja a figura 2A e as notações lá usadas):

(*) $$S_{2n} = \frac{2\sqrt{4+S_n^2}-4}{S_n}$$

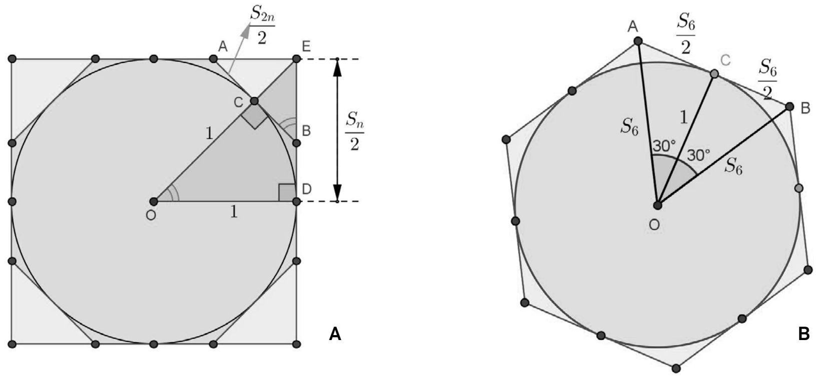

FIGURA 2. Polígonos regulares circunscritos numa circunferência.

Arquimedes começa mais uma vez com um hexágono, mas desta vez circunscrito (como na figura 2B). Deduz então que S_6=2√3/3 e, usando a fórmula de recorrência (*), obtém os valores de S_{12}, S_{24}, S_{48} e, finalmente, S_{96}. Por aproximação, calcula então o perímetro de um polígono regular de 96 lados circunscrito à circunferência de raio 1, igual a 96× S_{96} e, finalmente, dividindo esse perímetro por 2 (= ao diâmetro da circunferência de raio 1), obtem o valor aproximado de π (por excesso):

$$\pi \approx 3.14271 \approx 3\frac{1}{7}$$

REFERÊNCIAS

C.H. EDWARDS, JR., The Historical Development of the Calculus, Springer-Verlag, New York, 1979.

T.L.HEATH, The Works of Archimedes. Cambridge University Press, 1897 (Dover reprint).