

Pi (π)

João Nuno Tavares¹,
Ângela Geraldo

CMUP/ Universidade do Porto

¹ jntavar@fc.up.pt

CITAÇÃO

Tavares, JN, Geraldo, A (2017) Pi, *Rev. Ciência Elem.*, V5(01):004. doi.org/10.24927/rce2017.004

EDITOR

José Ferreira Gomes,
Universidade do Porto

RECEBIDO EM

12 de fevereiro de 2017

ACEITE EM

24 de março de 2017

PUBLICADO EM

31 de março de 2017

COPYRIGHT

© Casa das Ciências 2017.
Este artigo é de acesso livre, distribuído sob licença Creative Commons com a designação [CC-BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/), que permite a utilização e a partilha para fins não comerciais, desde que citado o autor e a fonte original do artigo.

rce.casadasciencias.org



RESUMO

O número π define-se através de

$$\pi = \frac{\text{perímetro de uma circunferência}}{\text{diâmetro dessa circunferência}}$$

A definição anterior tem uma dificuldade — como se define o perímetro de uma circunferência? No seu livro “Medição de um círculo”, Arquimedes mostrou que tem um valor situado entre $3\frac{10}{71}$ e $3\frac{10}{70}$. A ideia é encaixar a circunferência entre polígonos regulares, respetivamente inscritos e circunscritos, com um número de lados cada vez maior.

DESENVOLVIMENTO

A figura 1A mostra uma circunferência de raio 1, e um polígono regular inscrito com n lados (na figura $n=5$). $s_n = AB$ = comprimento de um lado desse polígono. D bissecta o arco AB e portanto $s_{2n} = AD = DB$ = comprimento de um lado de um polígono regular inscrito com $2n$ lados.

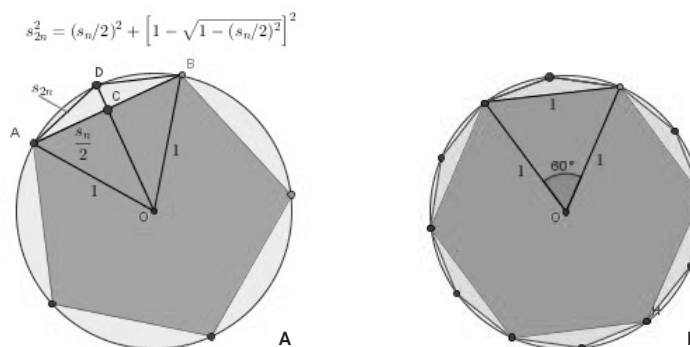


FIGURA 1. Polígonos regular inscritos numa circunferência.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ACD, retângulo em C, obtemos

$$s_{2n}^2 = AD^2 = AC^2 + CD^2 = AC^2 + (OD - OC)^2 = \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 + (1 - OC)^2$$

Uma segunda aplicação do teorema de Pitágoras, desta vez ao triângulo ACO, retângulo em C, dá

$$OC = \sqrt{OA^2 - AC^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}$$

Substituindo na primeira equação e fazendo alguns cálculos simples obtemos então (verifique)

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$$

o que nos permite calcular s_{2n} à custa de s_n .

Se agora fizermos $n=6$ (um hexágono regular inscrito), sabemos que $s_6=1$ (figura 1B). Aplicando sucessivamente a fórmula anterior, e após alguns cálculos simples, vem que

$$\begin{aligned} s_{12} &= \sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ s_{24} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \\ s_{48} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \\ s_{96} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} \end{aligned}$$

e assim sucessivamente.

O perímetro de um polígono regular de 96 lados, inscrito numa circunferência de raio 1, é pois igual a $96 \times s_{96}$ o que dá uma boa aproximação do perímetro dessa circunferência. Como

$$\pi = \frac{\text{perímetro de uma circunferência}}{\text{diâmetro dessa circunferência}}$$

obtemos a seguinte aproximação de π

$$\pi \approx 48 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} \approx 3.14103 \approx 3\frac{10}{71}$$

Arquimedes repetiu o mesmo argumento, agora para uma sequência de polígonos regulares circunscritos de 6, 12, 24, 48 e 96 lados. O leitor poderá deduzir a fórmula seguinte (veja a figura 2A e as notações lá usadas):

$$(*) \quad S_{2n} = \frac{2\sqrt{4 + S_n^2} - 4}{S_n}$$

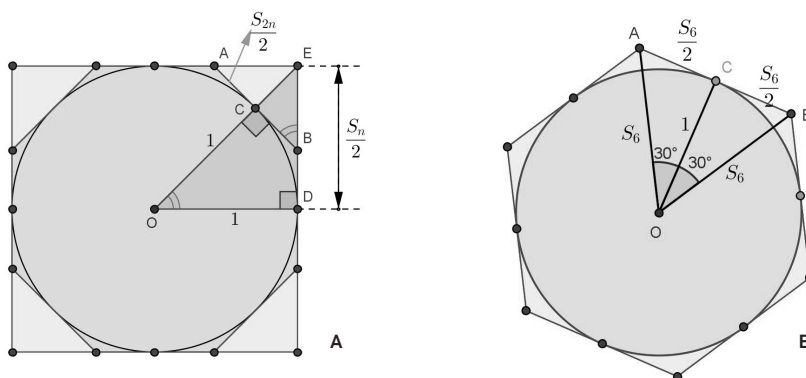


FIGURA 2. Polígonos regulares circunscritos numa circunferência.

Arquimedes começa mais uma vez com um hexágono, mas desta vez circunscrito (como na figura 2B). Deduz então que $S_6 = 2\sqrt{3}/3$ e, usando a fórmula de recorrência (*), obtém os valores de S_{12} , S_{24} , S_{48} e, finalmente, S_{96} . Por aproximação, calcula então o perímetro de um polígono regular de 96 lados circunscrito à circunferência de raio 1, igual a $96 \times S_{96}$ e, finalmente, dividindo esse perímetro por 2 (= ao diâmetro da circunferência de raio 1), obtém o valor aproximado de π (por excesso):

$$\pi \approx 3.14271 \approx 3\frac{1}{7}$$

REFERÊNCIAS

- C.H. EDWARDS, JR., The Historical Development of the Calculus, Springer-Verlag, New York, 1979.
T.L.HEATH, The Works of Archimedes. Cambridge University Press, 1897 (Dover reprint).