

Acontecimentos independentes

CITAÇÃO

Martins, EGM (2017)
Acontecimentos independentes,
Rev. Ciência Elem., V5(04):049.
doi.org/10.24927/rce2017.049

EDITOR

José Ferreira Gomes,
Universidade do Porto

RECEBIDO EM

9 de julho de 2017

ACEITE EM

11 de julho de 2017

PUBLICADO EM

06 de dezembro de 2017

COPYRIGHT

© Casa das Ciências 2017.
Este artigo é de acesso livre,
distribuído sob licença Creative
Commons com a designação
[CC-BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/), que permite
a utilização e a partilha para fins
não comerciais, desde que citado
o autor e a fonte original do artigo.

rce.casadasciencias.org



Maria Eugénia Graça Martins

Universidade de Lisboa
memartins@fc.ul.pt

De uma forma intuitiva somos levados a dizer que dois acontecimentos são independentes quando a realização de um deles não tem influência na realização do outro. Como avaliar esta influência? A Probabilidade condicional, um dos conceitos mais importantes da teoria da Probabilidade vai-nos permitir avaliar se, dados dois acontecimentos, a ocorrência de um deles condiciona, de alguma forma, a probabilidade de ocorrência do outro, conduzindo-nos, assim, à noção de independência entre acontecimentos.

Dados os acontecimentos A e B, com $P(B) > 0$, diz-se que o acontecimento A é **independente** do acontecimento B, se a probabilidade de A se verificar é igual à probabilidade condicional de A se verificar, dado que B se verificou

$$P(A) = P(A|B)$$

ou seja, o facto de se saber que o acontecimento B se realizou, não altera a probabilidade de A se realizar.

Se o acontecimento A é **independente** do acontecimento B, então o acontecimento B é **independente** de A, se $P(A) > 0$. Efetivamente, tendo em consideração a definição de probabilidade condicional, tem-se

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A)}{P(A)} = P(B)$$

Assim, os acontecimentos A e B, com $P(A) \times P(B) > 0$, são **independentes** quando a ocorrência de um deles não altera a probabilidade da ocorrência do outro, ou seja:

$$P(A|B) = P(A) \text{ e } P(B|A) = P(B)$$

Repare-se que se alguma das condições anteriores se verifica, da definição de probabilidade condicional vem que

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

A igualdade anterior costuma ser utilizada para definir a independência entre acontecimentos, dizendo-se que:

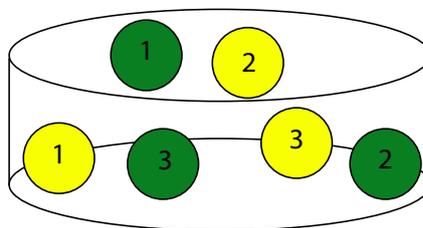
Dois acontecimentos A e B são **independentes** se e só se

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Esta definição de independência, embora não seja tão intuitiva, é a que é utilizada de um modo geral, não sendo necessário impor restrições aos valores de $P(A)$ e $P(B)$. Por exemplo se $P(A) = 0$, como $A \cap B \subseteq A$, vem $P(A \cap B) \leq P(A)$ e A é independente de qualquer outro acontecimento.

As duas definições de independência são equivalentes desde que se exija que $P(A) \times P(B) > 0$.

Exemplo – Considere-se uma caixa que contém 6 fichas de duas cores diferentes, numeradas de 1 a 3, conforme a figura junta:



Retira-se, ao acaso, uma ficha da caixa.

- a. Qual a probabilidade de que seja uma ficha com o número 2?

Uma vez que temos 6 fichas, das quais 2 têm o número 2, $P(2) = P(\text{retirar ficha com } 2) = 2/6 = 1/3$

- b. Depois de retirar a ficha, verificou que era verde. Qual a probabilidade de que tenha o número 2? Os acontecimentos *Número da ficha* e *Cor* serão independentes?

Como agora temos a informação que a ficha é verde, pretende-se a probabilidade condicional de obter um 2, sabendo que a ficha é verde, ou

$$\text{seja, } P(2|\text{cor verde}) = \frac{P(\text{cor verde e ter o } 2)}{P(\text{cor verde})} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

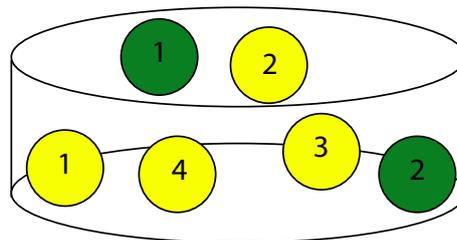
Então, $P(2|\text{cor verde}) = P(2)$

Se tivéssemos considerado qualquer dos outros números das fichas ou a cor amarela, obteríamos os mesmos resultados, ou seja,

$$P(i|\text{cor } x) = P(i) \text{ para } i=1, 2, 3 \text{ e } x=\text{amarela, verde}$$

donde concluímos que os acontecimentos *Número da ficha* e *Cor* são independentes.

Suponha agora que alterou a composição da caixa, de forma que agora tem 2 fichas verdes, numeradas de 1 a 2 e 4 fichas amarelas, numeradas de 1 a 4:



Retira-se, ao acaso, uma ficha da caixa.

- Qual a probabilidade de que seja uma ficha com o número 2?
Uma vez que temos 6 fichas, das quais 2 têm o número 2, $P(2)=2/6=1/3$
- Depois de retirar a ficha, verificou que era verde. Qual a probabilidade de que tenha o número 2? Pensa que esta probabilidade é igual à calculada na alínea anterior? Os acontecimentos *Número da ficha* e *Cor* serão independentes?

Como agora temos a informação que a ficha é verde, pretende-se a probabilidade condicional de obter um 2, sabendo que a ficha é verde, ou

$$\text{seja, } P(2|\text{cor verde}) = \frac{P(\text{cor verde e ter o 2})}{P(\text{cor verde})} = \frac{1/6}{2/6} = \frac{1}{2}$$

Repare-se que agora a informação adicional de que a ficha é verde, aumentou a probabilidade de a ficha ter o número 2. Agora os acontecimentos já não são independentes, pois $P(2|\text{cor verde}) \neq P(2)$

A independência de acontecimentos é uma propriedade que depende do modelo de Probabilidade que se introduziu no espaço de resultados, não sendo, portanto, uma propriedade dos acontecimentos. Consideremos o seguinte exemplo, adaptado de MURTEIRA ET AL (2012), página 82:

Dada uma moeda de um euro, não necessariamente “equilibrada” em que representamos por E a face Euro e N a face Nacional, consideremos o seguinte *modelo de probabilidade* para o fenómeno aleatório que consiste em verificar qual a face que fica voltada para cima após um lançamento da moeda

Resultado	E	N
Probabilidade	p	1-p

com $0 \leq p \leq 1$.

Considerem-se os acontecimentos

$$A = \{EEE, EEN, ENE, NEE\} \text{ e } B = \{EEE, NNN\}$$

associados com três lançamentos independentes da moeda. Como

$P(EEE) = P(E)P(E)P(E) = p^3$, $P(EEN) = P(E)P(E)P(N) = p^2(1-p)$, etc., tem-se $P(A) = p^3 + 3p^2(1-p)$ e $P(B) = p^3 + (1-p)^3$

Pode-se mostrar que a igualdade $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ só se verifica nos casos triviais $p=0$, $p=1$, e no caso simétrico, $p=1/2$. Assim, A e B podem ser ou não independentes, consoante a natureza da moeda, ou seja do valor de p que tenhamos considerado para o modelo de probabilidade anteriormente considerado.

Nota 1 – Dois acontecimentos não podem ser disjuntos (ou incompatíveis ou mutuamente exclusivos) e independentes, a não ser que um deles tenha probabilidade nula. Efetivamente se os acontecimentos A e B, com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, são incompatíveis, não podem ser independentes, uma vez que $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$ e $P(A) \times P(B) > 0$, vindo $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$.

Nota 2 – É frequente fazer-se confusão com os conceitos de acontecimentos independentes e acontecimentos incompatíveis. No entanto estes conceitos exprimem relações completamente diferentes, na medida em que a incompatibilidade de acontecimentos é uma propriedade inerente aos acontecimentos, não sendo necessário ter definido nenhuma probabilidade, enquanto que a independência de acontecimentos depende do modelo de probabilidade que se tenha definido no espaço de resultados onde estão definidos os acontecimentos.

REFERÊNCIAS

MURTEIRA, B., ANTUNES, M. Probabilidades e Estatística, volume I., 2012. Escolar Editora. ISBN 978-972-592-355-9.