Acontecimentos independentes

Maria Eugénia Graça Martins
Universidade de Lisboa
memartins@fc.ul.pt

CITAÇÃO
Martins, M.E.G. (2017)
Acontecimentos independentes,
Rev. Ciência Elem., V5(04):049.
doi.org/10.24927/rce2017.049

EDITOR
José Ferreira Gomes,
Universidade do Porto

RECEBIDO EM
9 de julho de 2017

ACEITE EM
11 de julho de 2017

PUBLICADO EM
06 de dezembro de 2017

rce.casadasciencias.org

De uma forma intuitiva somos levados a dizer que dois acontecimentos são independentes quando a realização de um deles não tem influência na realização do outro. Como avaliar esta influência? A Probabilidade condicional, um dos conceitos mais importantes da teoria da Probabilidade vai-nos permitir avaliar se, dados dois acontecimentos, a ocorrência de um deles condiciona, de alguma forma, a probabilidade de ocorrência do outro, conduzindo-nos, assim, à noção de independência entre acontecimentos.

Dados os acontecimentos A e B, com P(B)>0, diz-se que o acontecimento A é **independente** do acontecimento B, se a probabilidade de A se verificar é igual à probabilidade condicional de A se verificar, dado que B se verificou

$$P(A)=P(A|B)$$

ou seja, o facto de se saber que o acontecimento B se realizou, não altera a probabilidade de A se realizar.

Se o acontecimento A é **independente** do acontecimento B, então o acontecimento B é **independente** de A, se P(A)>0. Efetivamente, tendo em consideração a definição de probabilidade condicional, tem-se

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A)}{P(A)} = P(B)$$

Assim, os acontecimentos A e B, com P(A)xP(B)>0, são **independentes** quando a ocorrência de um deles não altera a probabilidade da ocorrência do outro, ou seja:

$$P(A|B)=P(A) \text{ e } P(B|A)=P(B)$$

Repare-se que se alguma das condições anteriores se verifica, da definição de probabilidade condicional vem que

$$P(A\cap B)=P(A)\text{x}P(B)$$

A igualdade anterior costuma ser utilizada para definir a independência entre acontecimentos, dizendo-se que:

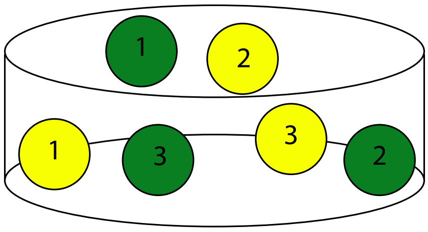
Dois acontecimentos A e B são **independentes** se e só se

$$P(A \cap B)=P(A)xP(B)$$

Esta definição de independência, embora não seja tão intuitiva, é a que é utilizada de um modo geral, não sendo necessário impor restrições aos valores de P(A) e P(B). Por exemplo se $P(A)=0$, como $A \cap B \subseteq A$, vem $P(A \cap B) \leq P(A)$ e A é independente de qualquer outro acontecimento.

As duas definições de independência são equivalentes desde que se exija que $P(A)xP(B)>0$.

Exemplo – Considere-se uma caixa que contém 6 fichas de duas cores diferentes, numeradas de 1 a 3, conforme a figura junta:

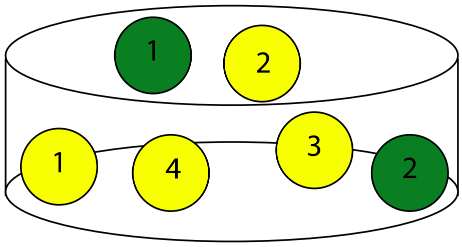


Retira-se, ao acaso, uma ficha da caixa.

a. Qual a probabilidade de que seja uma ficha com o número 2?
   Uma vez que temos 6 fichas, das quais 2 têm o número 2, P(2)=P(retirar ficha com 2)=2/6=1/3
b. Depois de retirar a ficha, verificou que era verde. Qual a probabilidade de que tenha o número 2? Os acontecimentos *Número da ficha* e *Cor* serão independentes?
   Como agora temos a informação que a ficha é verde, pretende-se a probabilidade condicional de obter um 2, sabendo que a ficha é verde, ou seja, $P(2|\text{cor verde})=\dfrac{P(\text{cor verde e ter o 2})}{P(\text{cor verde})}=\dfrac{1/6}{3/6}=\dfrac{1}{3}$

   Então, $P(2|\text{cor verde})=P(2)$
   Se tivéssemos considerado qualquer dos outros números das fichas ou a cor amarela, obteríamos os mesmos resultados, ou seja,
   $P(i|\text{cor } x)=P(i)$ para i=1, 2, 3 e x=amarela, verde
   donde concluímos que os acontecimentos *Número da ficha* e *Cor* são independentes.

Suponha agora que alterou a composição da caixa, de forma que agora tem 2 fichas verdes, numeradas de 1 a 2 e 4 fichas amarelas, numeradas de 1 a 4:



Retira-se, ao acaso, uma ficha da caixa.

a. Qual a probabilidade de que seja uma ficha com o número 2?
   Uma vez que temos 6 fichas, das quais 2 têm o número 2, P(2)=2/6=1/3
b. Depois de retirar a ficha, verificou que era verde. Qual a probabilidade de que tenha o número 2? Pensa que esta probabilidade é igual à calculada na alínea anterior? Os acontecimentos *Número da ficha* e *Cor* serão independentes?
   Como agora temos a informação que a ficha é verde, pretende-se a probabilidade condicional de obter um 2, sabendo que a ficha é verde, ou seja, $P(2|\text{cor verde}) = \frac{P(\text{cor verde e ter o 2})}{P(\text{cor verde})} = \frac{1/6}{2/6} = \frac{1}{2}$

   Repare-se que agora a informação adicional de que a ficha é verde, aumentou a probabilidade de a ficha ter o número 2. Agora os acontecimentos já não são independentes, pois $P(2|\text{cor verde}) \neq P(2)$

A independência de acontecimentos é uma propriedade que depende do modelo de Probabilidade que se introduziu no espaço de resultados, não sendo, portanto, uma propriedade dos acontecimentos. Consideremos o seguinte exemplo, adaptado de MURTEIRA ET AL (2012), página 82:

Dada uma moeda de um euro, não necessariamente "equilibrada" em que representamos por E a face Euro e N a face Nacional, consideremos o seguinte *modelo de probabilidade* para o fenómeno aleatório que consiste em verificar qual a face que fica voltada para cima após um lançamento da moeda

Resultado	E	N
Probabilidade	p	1-p

com $0 \leq p \leq 1$.

Considerem-se os acontecimentos

A=[EEE, EEN, ENE, NEE] e B=[EEE, NNN]

associados com três lançamentos independentes da moeda. Como

$P(EEE)=P(E)P(E)P(E)=p^3$, $P(EEN)=P(E)P(E)P(N)=p^2(1-p)$, etc.,

tem-se $P(A)=p^3+3p^2(1-p)$ e $P(B)=p^3+(1-p)^3$

Pode-se mostrar que a igualdade $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ só se verifica nos casos triviais $p=0$, $p=1$, e no caso simétrico, $p=1/2$. Assim, A e B podem ser ou não independentes, consoante a natureza da moeda, ou seja do valor de p que tenhamos considerado para o modelo de probabilidade anteriormente considerado.

Nota 1 – Dois acontecimentos não podem ser disjuntos (ou incompatíveis ou mutuamente exclusivos) e independentes, a não ser que um deles tenha probabilidade nula. Efetivamente se os acontecimentos A e B, com $P(A)>0$ e $P(B)>0$, são incompatíveis, não podem ser independentes, uma vez que $P(A\cap B)=P(\emptyset)=0$ e $P(A)\times P(B)>0$, vindo $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$.

Nota 2 – É frequente fazer-se confusão com os conceitos de acontecimentos independentes e acontecimentos incompatíveis. No entanto estes conceitos exprimem relações completamente diferentes, na medida em que a incompatibilidade de acontecimentos é uma propriedade inerente aos acontecimentos, não sendo necessário ter definido nenhuma probabilidade, enquanto que a independência de acontecimentos depende do modelo de probabilidade que se tenha definido no espaço de resultados onde estão definidos os acontecimentos.

REFERÊNCIAS

MURTEIRA, B. e ANTUNES, M., *Probabilidades e Estatística*, volume I., ISBN 978-972-592-355-9, Escolar Editora, 2012.