Mínimo Múltiplo Comum

João Nuno Tavares*, Ângela Geraldo[ⱡ]
* Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
[ⱡ] CMUP/ Universidade do Porto

CITAÇÃO
Tavares, J. N., Geraldo, A.(2017)
Mínimo Múltiplo Comum,
Rev. Ciência Elem., V5(01):066.
doi.org/10.24927/rce2017.066

EDITOR
José Ferreira Gomes
Universidade do Porto

RECEBIDO EM
03 de julho de 2013

ACEITE EM
17 de julho de 2013

PUBLICADO EM
30 de março de 2017

O mínimo múltiplo comum entre dois ou mais números inteiros é o menor número inteiro positivo que é múltiplo desses números. De outra forma, podemos dizer que o mínimo múltiplo comum de dois ou mais números inteiros é o menor número inteiro que é divisível por esses números. Se um dos números for zero, o mínimo múltiplo comum é, por definição, igual a zero. Por exemplo, o menor múltiplo que é comum a 10 e a 12 é o 60, logo, o mínimo múltiplo comum de 10 e 12 é o número inteiro 60.

Mais formalmente, seja m o mínimo múltiplo comum de a e b, temos que:
1) a|m e b|m;
2) $\forall x \in \mathbb{Z}$, a|x e b|x então m|x.

Notação

Utilizamos a notação mmc(a,b) para designar o mínimo múltiplo comum entre os números inteiros a e b. Retomando o exemplo anterior, escreveríamos que mmc(10,12)=60.

Algumas propriedades

- Se a é um múltiplo de b então mmc(a,b)=a;
- Se a é divisor de b então mmc(a,b)=b;
- Se $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, temos que mmc(at,bt)=tmmc(a,b);

Demonstração

Sejam m=mmc(a,b) e n=mmc(at,bt). Temos então que a|m e b|m, logo at|mt e bt|mt, ou seja, mt é um múltiplo comum de at e bt e portanto mt $\geq$ n.

Por outro lado, sabemos que at|n e bt|n e podemos escrever n=atx=bty, com x,y $\in \mathbb{Z}$. Mas então, a|$\frac{n}{t}$ e b|$\frac{n}{t}$ e assim $\frac{n}{t}$ é um múltiplo comum de a e b o que implica que $\frac{n}{t} \geq m.$ Multiplicando ambos os membros da desigualdade anterior por t obtemos n $\geq$ mt.

Considerando as duas desigualdades obtidas anteriormente, mt $\geq$ n e n $\geq$ mt, concluímos que n=mt, ou seja, mmc(at,bt)=tmmc(a,b).

Se $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, temos que $\left(\frac{a}{t}, \frac{b}{t}\right) = \frac{mmc\,(a,b)}{t}$;

Comutatividade: mmc(a,b)=mmc(b,a);

Associatividade: mmc(mmc(a,b),c)=mmc(a,mmc(b,c));

O produto do mínimo múltiplo comum de a e b pelo máximo divisor comum desses mesmos números, é igual ao produto entre a e b, ou seja, mmc(a,b)×mdc(a,b)=ab;

Se a e b são primos entre si, ou seja, mdc(a,b)=1, o mmc(a,b) é igual ao produto de a e b.

Cálculo do mmc

Mostramos em seguida dois processos que nos permitem determinar o mmc de dois ou mais números inteiros. A diferença entre eles reside essencialmente na morosidade e complexidade de cada um deles consoante os números em causa.

1º - Lista dos múltiplos

Neste processo o que se pretende, inicialmente, é que se escreva a lista ordenada dos múltiplos de cada um dos números. Posteriormente, pretende-se encontrar o menor número que aparece simultaneamente em todas as listas, ou seja, o menor múltiplo comum a todos os números considerados.

Exemplo

Como determinar o mmc(22,34)?

Comecemos por criar as listas ordenadas dos múltiplos de cada um dos números:

M_{22}=[22,44,66,88,110,...,330,352,**374**,396,...]

M_{34}=[34,68,102,136,170,...,340,**374**,408,...]

Pretendemos encontrar o menor elemento do conjunto $M_{22} \cap M_{34}$.

Portanto, o mmc(22,34)=374.

2º - Fatorização em números primos

A fatorização em números primos é também um processo a ter em conta para a determinação do mmc. Para isso, basta escrevermos cada um dos números como produto de números primos. O mínimo múltiplo comum desses números é igual ao produto dos fatores primos não comuns e dos comuns, cada um elevado ao maior dos expoentes. Vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo

Como calcular o mmc(63,18,84) através da fatorização em números primos?

$63=3\times3\times7=3^2\times7$

$18=2\times3\times3=2\times3^2$

$84=2\times2\times3\times7=2^2\times3\times7$

Logo, o mmc(63,18,84)=$2^2\times3^2\times7$=252.

Nota - O Algoritmo de Euclides pode também ser usado para o cálculo do mmc de dois ou mais números inteiros positivos, usando a penúltima propriedade acima enunciada, que estabelece a seguinte igualdade mmc(a,b)×mdc(a,b)=ab.

Algoritmo para cálculo do mmc

Pseudocódigo

Dados dois números inteiros positivos m e n.

1 - Tomamos a=m e b=n;

2 - Enquanto a for diferente de b, se a<b adicionamos m a a;

3 - Caso contrário, se a>b, adicionamos n a b;

4 - Repetir os passos 2 e 3 até a=b. O mmc(m,n) é então igual a a.

Código em Python

```
>>> def mmc(m,n):
...     if ( m != 0 and n != 0):
...             a=m
...             b=n
...             while a!=b:
...                     if ( a<b ):
...                             a=a+m
...                     else:
...                             b=b+n
...             return a
...     else:
...             return 0
```