REVISTA DE CIÊNCIA ELEMENTAR

Inequações

João Nuno Tavares*, Ângela Geraldo[1]
* Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
[1] CMUP/ Universidade do Porto

CITAÇÃO
Tavares, J. N., Geraldo, A.(2017)
Inequações,
Rev. Ciência Elem., V5(02):073.
doi.org/10.24927/rce2017.073

EDITOR
José Ferreira Gomes
Universidade do Porto

RECEBIDO EM
12 de junho de 2013

ACEITE EM
03 de julho de 2013

PUBLICADO EM
30 de junho de 2017

rce.casadasciencias.org

Uma inequação em R a uma incógnita é uma desigualdade que contem uma variável real. Assim, dá-se o nome de inequação a uma desigualdade à qual não se pode atribuir um valor de verdade (dizer se é verdadeira ou falsa), porque o seu valor de verdade depende do valor numérico que for atribuído à variável.

São exemplos de inequações: $2x+3>10$, $8-z\ \ 11$ e $-2a^2+3 \leq 7a$, onde $x,z,a \in \mathbb{R}$.

Resolver uma inequação é determinar os conjuntos ou os intervalos de valores que se podem atribuir à variável de modo a tornar a desigualdade verdadeira.

Inequações de 1º grau

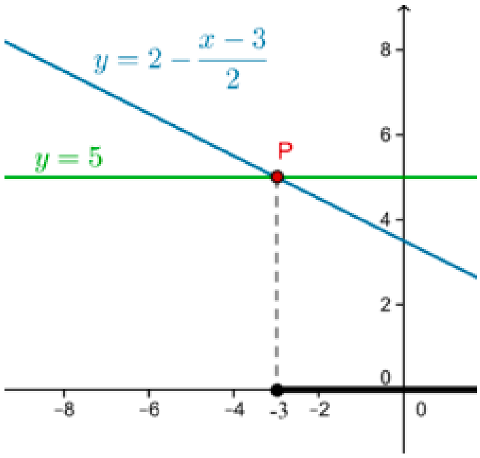

FIGURA 1. A função $y = 2 - \frac{x-3}{2}$ tem imagem inferior ou igual a $y = 5$ a partir do ponto P, ou seja para valores de x maiores ou iguais a −3.

A resolução de inequações do 1ºgrau comporta os mesmos desafios e os mesmos procedimentos que a resolução de equações do 1ºgrau. Assim, o objetivo principal da resolução de inequações do 1ºgrau será isolar a incógnita num dos membros, ou seja, obter x>…, x<…, x … ou x …. Na resolução destas inequações podemos utilizar as propriedades das desigualdades de forma a não modificar o seu valor de verdade. Para isso, podemos transformar a desigualdade por adição, subtração, multiplicação e divisão por um número positivo como fazemos na resolução de equações. No caso da multiplicação ou divisão por um número negativo, existe uma diferença essencial relativamente às equações, pois no caso das inequações será necessário alterar o sentido da desigualdade para manter o mesmo valor de verdade.

Qualquer inequação do 1ºgrau, pode ser reduzida, através das operações referidas anteriormente, a uma das quatro formas seguintes:

$$ax<b,\ ax>b,\ ax \leq b \ \text{ ou } \ ax \geq b$$

podendo a ser positivo ou negativo mas nunca nulo.

Exemplos

Como resolver a equação $2-\dfrac{x-3}{2} \leq 5$?

$$2-\frac{x-3}{2} \leq 5 \Leftrightarrow 4-x+3 \leq 10 \Leftrightarrow -x \leq 3 \Leftrightarrow x \geq -3$$

Logo o conjunto-solução desta inequação é [−3,+∞[, ver esquema FIGURA 1.

Inequações de 2º grau

Uma inequação do 2ºgrau (ou inequação quadrática) é uma inequação em que a incógnita toma grau dois num dos termos. Ou seja, é uma inequação do tipo

$$ax^2+bx+c \leq 0$$

em que o sinal da desigualdade pode ser >,<, $\leq$ ou $\geq$ e onde $a \neq 0$.

Para a resolução de uma inequação quadrática precisamos de calcular as soluções da equação $ax^2+bx+c=0$. Esse cálculo é feito através da fórmula resolvente para equações do 2ºgrau.

$$x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Seja $\Delta=b^2-4ac$ o discriminante. Temos três casos:

- Se $\Delta=0$ a equação tem apenas uma solução x=−b/2a;
- Se $\Delta>0$ a equação apresenta duas soluções reais distintas (consideremos essas soluções x_1 e x_2, $x_1 < x_2$);
- Por fim, se $\Delta<0$ a equação não tem soluções reais.

Consideremos a inequação quadrática do tipo $ax^2+bx+c \leq 0$ (os outros casos podem ser estudados da mesma forma).

Quando $\Delta<0$, ou seja, quando a equação $ax^2+bx+c=0$ não tem soluções reais, então temos dois casos:

- Se $a>0$ a inequação não tem soluções reais;
- Se $a<0$ a inequação é válida para $x \in \mathbb{R}$.

No caso em que $\Delta=0$ temos que:

- Se $a>0$ a inequação tem apenas uma solução real;
- Se $a<0$ a inequação é válida para $x \in \mathbb{R}$.

Finalmente se $\Delta>0$ temos que:

- Se a>0 a inequação é válida no intervalo $[x_1,x_2]$;
- Se a<0 a inequação é válida em $]-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[$.

$\Delta < 0$ e a>0

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c	+	+	+

$\Delta < 0$ e a<0

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c	−	−	−

$\Delta = 0$ e a>0

x	$-\infty$	$-b/2a$	$+\infty$
ax^2+bx+c	+	0	+

$\Delta = 0$ e a<0

x	$-\infty$	$-b/2a$	$+\infty$
ax^2+bx+c	−	0	−

$\Delta > 0$ e a>0

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	+	0	−	0	+

$\Delta > 0$ e a<0

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	−	0	+	0	−

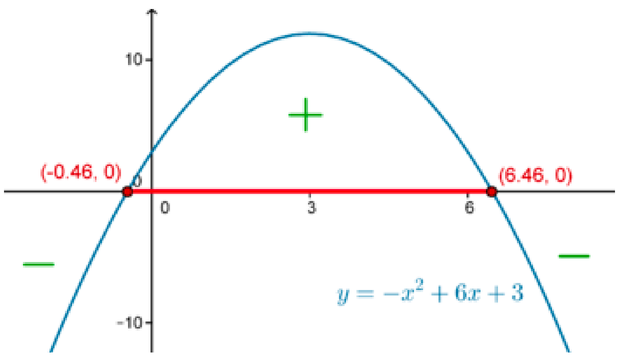

FIGURA 2. A função quadrática $-x^2+6x+3$ é maior ou igual a zero para valores de x compreendidos entre $3-2\sqrt{3}$ e $3+2\sqrt{3}$ inclusivé.

Exemplos

Como resolver a inequação $(x+3)^2 \geq 2x^2+6$?

Começamos por simplificar a inequação: $x^2+6x+9 \geq 2x2+6 \Leftrightarrow -x^2+6x+3$ 0.

O passo seguinte é determinar as soluções da equação $-x^2+6x+3=0$. Através da fórmula resolvente obtemos,

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{g^2-4\times(-1)\times3}}{-2}\Leftrightarrow x=3-2\sqrt{3}\vee x=3+2\sqrt{3}$$

Organizando a informação num quadro de sinal,

x	$-\infty$	$3-2\sqrt{3}$		$3+2\sqrt{3}$	$+\infty$
$-x^2+6x+3$	–	0	+	0	–

A inequação $-x^2+6x+3$ 0 é assim válida no intervalo $[3-2\sqrt{3},3+2\sqrt{3}]$, ver FIGURA 2.

Inequações com funções racionais

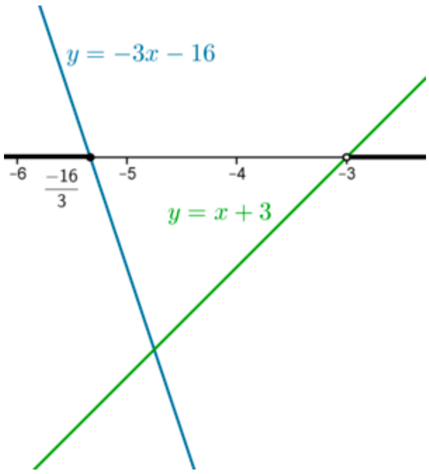

FIGURA 3. As duas retas tomam valores com sinais contrários (valores cuja divisão é negativa) para valores de x inferiores a $\frac{-16}{3}$ e superiores a −3.

Por simplicidade vamos apenas considerar inequações do tipo

$$\frac{p(x)}{q(x)}\leq 0$$

onde p e q são polinómios de grau 1 ou 2 (a desigualdade pode ser $\geq$, > ou <).

Na resolução deste tipo de inequações com funções racionais existe mais um fator a ter em conta que é o facto do denominador nunca se poder anular.

Vejamos o seguinte exemplo:

$$\frac{2x-1}{x+3}\leq 5$$

Neste exemplo, temos de garantir que o valor que anula o denominador não aparece como solução da inequação, ou seja, que $x+3\neq 0\Leftrightarrow x\neq -3$.

Resolvendo a inequação temos então que,

$$\frac{2x-1}{x+3}-5\leq 0\Leftrightarrow\frac{2x-1-5x-15}{x+3}\leq 0\Leftrightarrow\frac{-3x-16}{x+3}\leq 0.$$

Considerando o quadro de sinal seguinte, temos que:

x	-∞	-16/3		-3	+∞
-3x-16	+	0	-	-	-
x+3	-	-	-	0	+
(-3x-16)/(x+3)	-	0	+	não definido	-

Logo, a inequação $\frac{-3x-16}{x+3} \leq 0$ é válida no intervalo $]-\infty,-16/3] \cup]-3,+\infty[$, ver FIGURA 3.

Exemplos

Como resolver a inequação $\frac{(x-5)(x+1)}{x^2-2x+1} < 0$?

Para resolver esta inequação basta conhecermos os valores que anulam cada um dos fatores do numerador, que são x=5 e x=-1 respectivamente, e os valores que anulam o denominador. Através da fórmula resolvente para equações do 2º grau descobrimos que o denominador desta inequação se anula em x=1. Este valor, x=1, não poderá fazer parte do conjunto ou intervalo de valores que são solução desta inequação pois é o valor que anula o denominador.

Organizando esta informação num quadro de sinais temos então que:

x	-∞	-1		1		5	+∞
x-5	-	-	-	-	-	0	+
x+1	-	0	+	+	+	+	+
x2-2x+1	+	+	+	0	+	+	+
(x-5)(x+1)/(x2-2x+1)	+	0	-	nd	-	0	+

Concluímos então que o conjunto-solução da inequação é $]-1,1[\cup]1,5[$.

Inequações com módulo

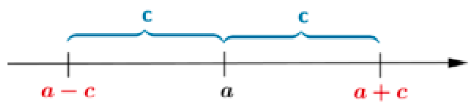

FIGURA 4. Caso em que c>0.

Consideremos a inequação |x-a| ≤c. Qual será o significado desta inequação?

Ora, |x-a| representa a distância entre os pontos x e a, em R. Portanto, a inequação |x-a| ≤c representa os pontos x que estão a uma distância de a inferior ou igual a c.

- Se c<0 a inequação é impossível, uma vez que não existem distâncias negativas, isto é |x-a| ≥0;
- Se c=0, a inequação |x-a| ≤0 tem uma única soluçao quando x=a;
- Já se c>0, |x-a| ≤c ⇔ -c ≤x-a ≤c ⇔ a-c ≤x ≤a+c.

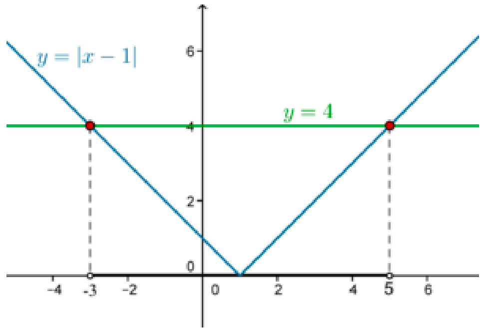

FIGURA 5. Os objetos da função módulo representada têm imagem inferior a 4 para valores de x entre −3 e 5, exclusivé.

Consideremos então a inequação |x−1|<4. Esta condição representa os pontos x$\in \mathbb{R}$ cuja distância ao ponto 1 é inferior a 4. Resolvemos este tipo de inequações da seguinte forma:

$$|x-1| < 4 \Leftrightarrow x-1 < 4 \wedge x-1 > -4 \Leftrightarrow x < 5 \wedge x > -3.$$

Logo a inequação é válida no intervalo]−3,5[, ver FIGURA 5.

Consideremos agora a inequação |x+5|$\geq$2. A condição representa o conjunto dos pontos x (em $\mathbb{R}$) cuja distância ao ponto −5 é superior ou igual a 2. Resolvemos este tipo de inequações da seguinte forma:

$$|x+5| \geq 2 \Leftrightarrow x+5 \geq 2 \vee x+5 \leq -2 \Leftrightarrow x \geq -3 \vee x \leq -7.$$

Neste caso, o intervalo que é solução desta inequação é $]-\infty, -7] \cup [-3, +\infty[$.

Considerando a inequação |x−2|²−|x|$\leq$0 temos dois casos a considerar. Se x$\geq$0, a inequação fica na forma |x−2|²−x$\leq$0, enquanto que se x<0 a inequação fica na forma |x−2|2+x$\leq$0. Ora então,

Temos que se x$\geq$0,

$$|x-2|^2 - x \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - x \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$$

Para o caso em que x<0,

$$|x-2|^2 + x \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + x \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, o intervalo que é solução desta inequação é [1,4].