

# Fórmulas da duplicação e da bisseção do ângulo

## CITAÇÃO

Tavares, J. N., Geraldo, A. (2017)

Fórmulas da duplicação e da bisseção do ângulo,

*Rev. Ciência Elem.*, V5(02):075.

[doi.org/10.24927/rce2017.075](https://doi.org/10.24927/rce2017.075)

## EDITOR

José Ferreira Gomes

Universidade do Porto

## RECEBIDO EM

23 de fevereiro de 2013

## ACEITE EM

07 de março de 2013

## PUBLICADO EM

30 de junho de 2017

## COPYRIGHT

© Casa das Ciências 2021.

Este artigo é de acesso livre, distribuído sob licença Creative Commons com a designação [CC-BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/), que permite a utilização e a partilha para fins não comerciais, desde que citado o autor e a fonte original do artigo.

[rce.casadasciencias.org](http://rce.casadasciencias.org)



João Nuno Tavares\*, Ângela Geraldo†

\* Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

† CMUP/ Universidade do Porto

## Duplicação do ângulo

Consideremos  $\alpha$  e  $\beta$  dois ângulos. Queremos determinar as razões trigonométricas de um ângulo duplo.

Sabemos que, a fórmula do seno da soma de dois ângulos é

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha.$$

Se nesta fórmula supusermos  $\alpha = \beta = a$  obtemos

$\sin(a + a) = \sin a \cos a + \sin a \cos a$  que é equivalente a:

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

Da mesma forma, conhecida a fórmula do cosseno da soma de dois ângulos que é  $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$ , ao admitirmos que  $\alpha = \beta = a$  obtemos  $\cos(a + a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a$  que é equivalente a:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

A fórmula da tangente de um ângulo duplo deduz-se também da fórmula da tangente da soma de dois ângulos que é  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$ . Admitindo

$\alpha = \beta = a$  obtemos  $\tan(a + a) = \frac{\tan a + \tan a}{1 - \tan a \tan a}$  que é equivalente a:

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

## Exemplo

Determinar  $\sin 2a$ ,  $\cos 2a$  e  $\tan 2a$  sabendo que  $\cos a = \frac{2}{3}$  e  $a \in 1^\circ Q$ .

Pelas fórmulas anteriores temos então que  $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ . Como já conhecemos  $\cos a$  podemos através da fórmula fundamental da trigonometria determinar  $\sin a$ .

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Leftrightarrow \sin^2 a + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 a = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \sin a = \pm \frac{\sqrt{5}}{3},$$

como  $a$  é um ângulo do  $1^{\circ}Q$  concluímos então que  $\sin a = \frac{\sqrt{5}}{3}$ .

$$\text{Portanto, } \sin 2a = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}.$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = -\frac{1}{9}$$

Para determinarmos  $\tan 2a$  pela fórmula anterior, necessitamos conhecer previamente o valor de  $\tan a$ . Como  $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$  temos então que  $\tan a = \frac{\sqrt{5}/3}{2/3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

$$\text{Logo, } \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}}{1 - \frac{5}{4}} = -4\sqrt{5}.$$

### Bissecção do ângulo

Olhemos agora para o problema da determinação das razões trigonométricas da bissecção de um ângulo. Notemos que a fórmula fundamental da trigonometria nos permite estabelecer a seguinte igualdade

$$\cos^2 \left(\frac{a}{2}\right) + \sin^2 \left(\frac{a}{2}\right) = 1.$$

Considerando a fórmula do cosseno do ângulo duplo que vimos anteriormente para um ângulo  $b$ , temos que  $\cos 2b = \cos^2 b - \sin^2 b$ . Admitindo  $2b = a$  obtemos  $\cos^2 \left(\frac{a}{2}\right) - \sin^2 \left(\frac{a}{2}\right) = \cos a$ . Adicionando membro a membro esta igualdade com a obtida através da fórmula fundamental da trigonometria obtemos  $2 \cos^2 \left(\frac{a}{2}\right) = 1 + \cos a$  que é equivalente a:

$$\cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$$

Para obtermos a fórmula para o seno da bissecção de um ângulo basta subtrair membro a membro as igualdades obtidas anteriormente,  $\cos^2 \left(\frac{a}{2}\right) - \sin^2 \left(\frac{a}{2}\right) = \cos a$ . Dessa subtração resulta que  $2 \sin^2 \left(\frac{a}{2}\right) = 1 - \cos a$  que é equivalente a:

$$\sin \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$$

Como sabemos a tangente de um ângulo pode obter-se pelo quociente entre o seno e o cosseno desse mesmo ângulo. Portanto, através das igualdades estabelecidas anteriormente podemos concluir que  $\tan \frac{a}{2} = \frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}} = \frac{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}}$  é equivalente a (com

$\cos a \neq 1$ ):

$$\tan \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$$

Nota - A presença de duplo sinal nas fórmulas anteriores explica-se pelo facto de o ângulo  $a$  não ser determinado pelo seu cosseno.

### Exemplo

Determinar  $\sin \frac{a}{2}$ ,  $\cos \frac{a}{2}$  e  $\tan \frac{a}{2}$  sabendo que  $\cos a = -\frac{1}{3}$  e  $a \in 2^{\circ}Q$ .

Pelas fórmulas anteriores temos então que:

$$\sin \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - (-\frac{1}{3})}{2}} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}, \text{ como } a \text{ é um ângulo do } 2^{\circ}Q$$

então  $a/2$  é um ângulo do  $1^{\circ}Q$ , concluímos então que  $\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

$$\cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 + (-\frac{1}{3})}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}, \text{ mais uma vez como } a/2 \text{ é}$$

um ângulo do  $1^{\circ}Q$ , concluímos então que  $\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1}{3}}$ .

$$\tan \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} = \pm \sqrt{\frac{1 - (-\frac{1}{3})}{1 + (-\frac{1}{3})}} = \pm \sqrt{2}, \text{ como } a/2 \text{ é um ângulo do}$$

$1^{\circ}Q$ , concluímos então que  $\tan \frac{a}{2} = \sqrt{2}$ .

### REFERÊNCIAS

<sup>1</sup>J. Jorge G. Calado (1974) *Compêndio de Trigonometria*, 4ª edição. Liv. Popular de Francisco Franco, Lisboa.