Fórmulas da soma e da diferenaça de dois ângulos

João Nuno Tavares*, Ângela Geraldo[I]
* Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
[I] CMUP/ Universidade do Porto

CITAÇÃO
Tavares, J. N., Geraldo, A.(2017)
Fórmulas da soma e da diferença de dois ângulos,
Rev. Ciência Elem., V5(03):076.
doi.org/10.24927/rce2017.076

EDITOR
José Ferreira Gomes
Universidade do Porto

RECEBIDO EM
15 de janeiro de 2013

ACEITE EM
30 de março de 2013

PUBLICADO EM
30 de setembro de 2017

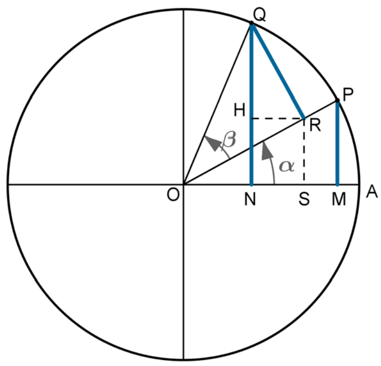


FIGURA 1.

Adição de dois ângulos

Consideremos um círculo trigonométrico e sejam α e β dois ângulos positivos de vértice no centro O do círculo. Por simplicidade vamos considerar o caso em que a soma $\alpha+\beta$ é menor do que $\frac{\pi}{2}\mathrm{rad}$. Os outros casos tratam-se de forma análoga, recorrendo a relações trigonométricas.

Os lados extremidades dos ângulos α e β intersectam a circunferência em dois pontos, denominados P e Q, respetivamente. Por esses dois pontos, traçamos dois segmentos de reta perpendiculares a OA, $[PM]$ e $[QN]$, respectivamente (FIGURA 1). Por Q tracemos um segmento de reta $[QR]$ perpendicular a OP e por R tracemos um segmento de reta $[HR]$ paralelo a OA e um segmento de reta $[RS]$ perpendicular a OA (ver figura 1).

Obtemos assim três triângulos retângulos $[OPM]$, $[ORS]$ e $[HQR]$ que são semelhantes.

Como se trata de um círculo cujo raio tem uma unidade, as definições de seno e cosseno de um ângulo agudo permitem-nos estabelecer as seguintes relações:

$$\sin\ \alpha = \overline{PM}; \cos\ \alpha = \overline{OM}; \sin\ \beta = \overline{QR}; \cos\ \beta = \overline{OR}$$

$$\sin\ \ (\alpha+\beta) = \overline{QN} = \overline{QH} + \overline{RS}; \cos\ \ (\alpha+\beta) = \overline{ON} = \overline{OS} - \overline{HR}$$

O facto de $[ORS]$ e $[OPM]$ serem triângulos semelhantes permite estabelecer a seguinte igualdade

$$\frac{\overline{RS}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OP}}$$

que, atendendo as relações estabelecidas anteriormente é equivalente a

$$\frac{\overline{RS}}{\sin\ \alpha} = \frac{\overline{OS}}{\cos\ \alpha} = \frac{\cos\ \beta}{1}.$$

Daqui resulta que, $\overline{RS} = \sin\ \alpha\ \cos\ \beta$ e $\overline{OS} = \cos\ \alpha\ \cos\ \beta$.

Atendendo ao facto de $[HQR]$ e $[OPM]$ também serem triângulos semelhantes podemos da mesma forma estabelecer a seguinte igualdade

$$\frac{\overline{HR}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{QH}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{QR}}{\overline{OP}}$$

que, usando as relações estabelecidas anteriormente para o seno e cosseno dos ângulos é equivalente a

$$\frac{\overline{HR}}{\sin\ \alpha} = \frac{\overline{QH}}{\cos\ \alpha} = \frac{\sin\ \beta}{1}\ .$$

Daqui resulta que, $\overline{HR} = \sin\ \alpha\ \sin\ \beta$ e $\overline{QH} = \cos\ \alpha\ \sin\ \beta$.

Deduzimos então, das igualdades e relações estabelecidas anteriormente, que:

$$\sin\left(\alpha+\beta\right) = \sin\ \alpha\ \cos\ \beta + \sin\ \beta \cos\ \alpha \quad | \quad \cos\left(\alpha+\beta\right) = \cos\ \alpha\ \cos\ \beta - \sin\ \alpha\ \sin\ \beta$$

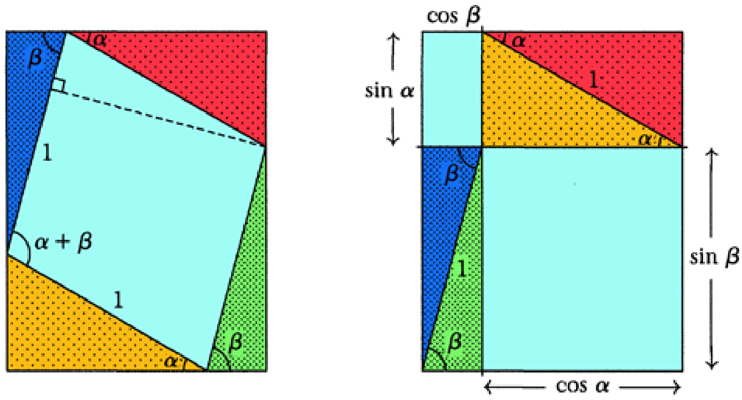
Sabemos ainda que, para todo o ângulo $\alpha+\beta$ com $\cos\left(\alpha+\beta\right) \neq 0$ se tem $\tan\left(\alpha+\beta\right) = \dfrac{\sin\left(\alpha+\beta\right)}{\cos\left(\alpha+\beta\right)}$.

Dividindo ambos os termos da fração por $\cos\ \alpha\ \cos\ \beta\ (\cos\ \alpha \neq 0 \text{ e } \cos\ \beta \neq 0)$ a igualdade anterior é equivalente a:

$$\tan\left(\alpha+\beta\right) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\ \tan\beta}$$

Uma outra prova da fórmula do seno da soma

A demostração seguinte deve-se a Volker Priebe e Edgar A. Ramos “*Proof without Words: The Sine of a Sum*”; Mathematics Magazine, Vol. 73, No. 5 (Dec., 2000), p. 392. A figura fala por si:



Mas eis algumas indicações:

Os dois rectângulos têm a mesma largura e o mesmo comprimento (e portanto a mesma área). Porquê?

O quadrilátero azul claro contido no rectângulo da esquerda é um paralelogramo. Porquê? A área desse paralelogramo é igual a $\sin(\alpha+\beta)$. Porquê?

A área do paralelogramo azul claro contido no rectângulo da esquerda é igual à soma das áreas dos dois rectângulos azul claro contidos no rectângulo da direita. Porquê? A soma destas áreas é pois $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$. Porquê?

Portanto:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\beta\sin\alpha$$

Subtração de dois ângulos

O problema da subtração de dois ângulos pode ser reduzido ao anterior se considerarmos a diferença $\alpha-\beta$ como a soma do ângulo α com o ângulo $-\beta$, ou seja, $\sin(\alpha-\beta)=\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cos(-\beta)+\sin(-\beta)\ \cos\alpha$ como $\cos(-\beta)=\cos(\beta)$ e $\sin(-\beta)=-\sin\beta$ temos então que:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$

Da mesma forma, temos que $\cos(\alpha-\beta)=\cos\ [\alpha+(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$ é então equivalente a:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\ [\alpha+(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$$

Sabemos ainda que, para todo o ângulo $\alpha-\beta$ com $\cos(\alpha-\beta)\neq 0$ se tem $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$.

Dividindo ambos os termos da fração por $\cos\alpha\cos\beta\,(\cos\alpha\neq 0 \text{ e } \cos\beta)\neq 0$ a igualdade anterior é equivalente a:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

REFERÊNCIAS

[1] J. JORGE G. CALADO, *Compêndio de Trigonometria*, 4ªedição. Liv. Popular de Francisco Franco, Lisboa. 1974.