REVISTA DE CIÊNCIA ELEMENTAR

Ângulos e Circunferências

João Nuno Tavares*, Ângela Geraldo[ł]
* Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
[ł] CMUP/ Universidade do Porto

CITAÇÃO
Tavares, J. N., Geraldo, A. (2017)
Ângulos e Circunferências,
Rev. Ciência Elem., V5(03):078.
doi.org/10.24927/rce2017.078

EDITOR
José Ferreira Gomes
Universidade do Porto

RECEBIDO EM
21 de dezembro de 2012

ACEITE EM
21 de janeiro de 2013

PUBLICADO EM
30 de setembro de 2017

Seja *C* uma circunferência de raio $r > 0$, centrada num ponto *O*. Um ângulo ao centro é um dos ângulos formados por dois raios de *C*. Por exemplo o ângulo AOB assinalado no applet.

Este ângulo determina, ou subentende, um arco da circunferência *C* (no exemplo, o arco *AB* a vermelho).

Quando o ângulo ao centro é medido em radianos, qual o comprimento do arco subentendido?

Teorema: A medida (em radianos) de um ângulo ao centro é igual ao comprimento do arco subentendido, dividido pelo raio da circunferência.

Demonstração. Como o ângulo de uma volta inteira ($= 2\pi r$ *rad*) subentende o perímetro total da circunferência ($= 2\pi r$, cm, por exemplo), então o ângulo ao centro α subentende um arco de comprimento a, dado pela regra de três simples seguinte

$$\begin{gathered} 2\pi \leftrightarrow 2\pi r \\ \alpha \leftrightarrow a \end{gathered}$$

donde se conclui que

$$a = \text{arc } AB = \frac{2\pi r\alpha}{2\pi} = r\alpha$$

medido na mesma unidade em que se mede o raio *r* (cm, por exemplo).

Ângulo do segmento

Seja C uma circunferência de raio $r > 0$, centrada num ponto O. O ângulo do segmento é um dos ângulos formado por uma corda e pela tangente a C numa das extremidades dessa corda. Por exemplo o ângulo BAC assinalado no applet. Este ângulo determina, ou subentende, um arco da circunferência C (no exemplo, o arco AMB a vermelho).

Quando o ângulo do segmento é medido em radianos, qual o comprimento do arco subentendido?

Teorema: A medida (em radianos) de um ângulo do segmento é igual a metade do comprimento do arco subentendido, dividido pelo raio da circunferência.

Demonstração. Seja OM o raio perpendicular à corda AB, intersectando-a no seu ponto médio. M é o ponto médio do arco AMB. A tangente AC a C em A, é perpendicular ao raio OA.

Portanto, os ângulos MOA e BAC têm a mesma amplitude (são iguais). Pelo ponto anterior, o comprimento do arco AM é igual ao produto do raio r pela medida do ângulo ao centro MOA, em radianos. Daqui se conclui portanto que

$$\mathrm{arc}\ AMB = 2r\angle BAC$$

onde $\angle BAC$ representa a medida (ou amplitude) do ângulo $\angle BAC$, em radianos, $\mathrm{arc}\ AMB$ o comprimento do arco AMB, e r é o raio da circunferência.

Ângulo inscrito

Seja Ð uma circunferência de raio $r > 0$, centrada num ponto O. Um ângulo inscrito é o ângulo formado por duas cordas de C, que partilham um vértice comum, situado sobre a circunferência. Por exemplo, o ângulo BAC assinalado no applet, formado pelas duas cordas BA e CA. Este ângulo determina, ou subentende, um arco da circunferência C (no exemplo, o arco BC, a vermelho).

Quando o ângulo inscrito é medido em radianos, qual o comprimento do arco subentendido?

Teorema: A medida (em radianos) de um ângulo inscrito é igual a metade do comprimento do arco subentendido, dividido pelo raio da circunferência.

Demonstração. Consideremos a tangente AD à circunferência, no ponto A. Esta tangente define dois ângulos de segmento e os respetivos arcos subentendidos - o ângulo CAD, que subentende o arco AC, a verde, e o ângulo BAD, que subentende o arco BCA. Mas (veja o applet)

$$\mathrm{arc}\ BC = \mathrm{arc}\ BCA - \mathrm{arc}\ CA$$

Por outro lado, pelo ponto anterior, temos que

$$\mathrm{arc}\ BCA = 2r\angle BAD \text{ e } \mathrm{arc}\ CA = 2r\angle CAD$$

Portanto,

$$\mathrm{arc}\ BC = 2r\left(\angle BAD - \angle CAD\right) = 2r\ \angle BAC$$

Ângulo ex-inscrito

Seja C uma circunferência de raio $r > 0$, centrada num ponto O. Um ângulo ex-inscrito é um ângulos formado por uma corda BA e pelo prologamento AD de uma outra corda CA, contígua à primeira. Por exemplo o ângulo $\alpha = BAD$ assinalado no applet. Os lados deste ângulo determinam, ou subentendem, dois arcos da circunferência C (no exemplo, o arco BA) a verde e o arco AC a cor de laranja.

Quando o ângulo ex-inscrito α é medido em radianos, qual o comprimento do arco subentendido?

Teorema: A medida (em radianos) de um ângulo ex-inscrito é igual à semi-soma dos comprimentos dos arcos subentendidos pelos seus lados, dividida pelo raio da circunferência.

Demonstração. Do applet vemos que $\alpha = \gamma + \delta$. Pelo ponto anterior, sabemos que a medida do ângulo inscrito γ é iguala a $\frac{1}{2r}\mathrm{arc}\ AC$. Análogamente, a medida do ângulo inscrito δ é igual a $\frac{1}{2r}\mathrm{arc}\ AB$, donde se conclui que

$$\alpha = \gamma + \delta = \frac{1}{2r}\left(\mathrm{arc}\ AC + \mathrm{arc}\ AC\right)$$

como se pretendia.

Ângulos cujo vértice não pertence à circunferência

Vértice interior

Consideremos o ângulo $\alpha = BAC$, determinado por duas cordas que se intersectam num ponto A, interior à circunferência. O ângulo subentende o arco BC (a verde no applet), e os prolongamentos dos lados de α determinam o arco DE (a castanho no applet).

Teorema: A medida (em radianos) do ângulo $\alpha = BAC$ é igual à semi-soma dos comprimentos dos arcos subentendidos pelos seus lados e seus prolongamentos, dividida pelo raio da circunferência.

Demonstração. Temos que $\alpha = \beta + \gamma$ (veja o applet). Mas $\gamma = \frac{1}{2r}\mathrm{arc}\ BC$, enquanto que

$$\beta = \frac{1}{2r}\mathrm{arc}\ DE$$

Somando, obtemos o que se pretende.

Vértice exterior

Consideremos o ângulo $\alpha = BAC$, determinado por duas secantes à circunferência que se intersectam num ponto A, exterior a ela. O ângulo subentende dois arcos - um maior, o arco BC (a verde no applet), e um menor, o arco DE (a azul no applet).

Teorema: A medida (em radianos) do ângulo $\alpha = BAC$ é igual à semi-diferença dos comprimentos dos arcos maior e menor, subentendidos pelos seus lados, dividida pelo raio da circunferência.

Demonstração. Temos que $\beta = \alpha + \gamma$ (veja o applet), o que implica que $\beta = \alpha - \gamma$. Mas $\beta = \frac{1}{2r}\mathrm{arc}\ BC$, enquanto que $\gamma = \frac{1}{2r}\mathrm{arc}\ DE$.

Subtraindo, obtemos o que se pretende, isto é

$$\alpha = \frac{1}{2r}\left(\mathrm{arc}\ BC - \mathrm{arc} DE\right)$$

Outras situações com tangência

Usando métodos análogos aos anteriores, o leitor pode formular e demonstrar os resultados relativos às duas situações ilustradas nos dois applets ao lado.