REVISTA DE CIÊNCIA ELEMENTAR

Lei dos cossenos

João Nuno Tavares*, Ângela Geraldo [1]
* Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
[1] CMUP/ Universidade do Porto

CITAÇÃO
Tavares, J. N., Geraldo, A. (2017)
Lei dos cossenos,
Rev. Ciência Elem., V5(04):084.
doi.org/10.24927/rce2017.084

EDITOR
José Ferreira Gomes
Universidade do Porto

RECEBIDO EM
08 de dezembro de 2012

ACEITE EM
29 de dezembro de 2012

PUBLICADO EM
31 de dezembro de 2017

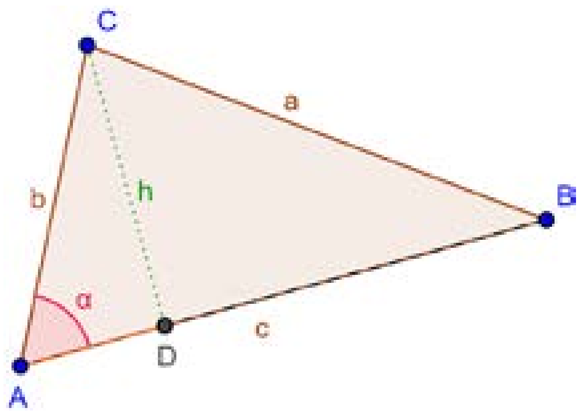
rce.casadasciencias.org

Lei dos cossenos

Num triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, menos o dobro do produto desses lados pelo cosseno do ângulo interno por eles determinado.

Por exemplo, no caso ilustrado no applet

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$



Eis a demonstração. Considere o triângulo ABC. Seja h a medida da altura relativa ao vértice C (veja o applet ao lado). O triângulo ADC é retângulo em D, e daí que (teorema de Pitágoras).

$$b^2=h^2+AD^2 \Rightarrow h^2=b^2-AD^2$$

Analogamente, o triângulo BDC é retângulo em D, e daí que (teorema de Pitágoras).

$$a^2=h^2+(BD)^2 \Rightarrow h^2=a^2-BD^2=a^2-(c-AD)^2$$

Igualando as duas expressões obtemos

$b^2-AD^2=a^2-(c-AD)^2=a^2-c^2-AD^2+{}^2cAD$

e atendendo a que $AD=bc\cos\alpha$, vem finalmente que

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

que é a chamada lei dos cossenos.

É importante notar que AD tem sinal positivo quando D está à direita de A, e tem sinal negativo quando D está à esquerda de A (relativamente ao sentido de A para B).

Uma aplicação

Dados

Dois círculos no plano, de raios e centros conhecidos, digamos $C_1=C(z_1,R_1)$ e $C_2=C(z_2,R_2)$, que não se intersectam. Portanto, usando notações complexas $|z_1-z_2|>R_1+R_2$

Um terceiro círculo $C=C(z,R)$ do qual apenas se conhece o raio R.

Problema: calcular as posições do centro z de tal forma a que C seja tangente aos dois círculos dados C_1 e C_2.

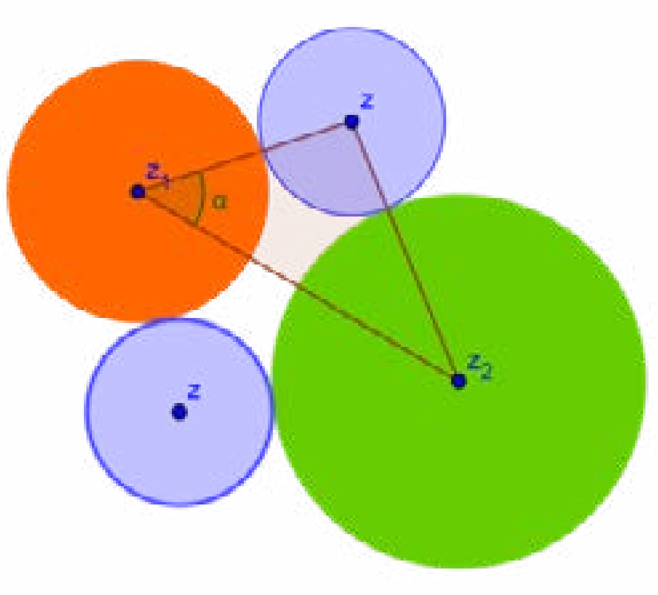


FIGURA 1. Uma aplicação da lei dos cossenos.

$$z = z_1 + (R+R_1)\,\frac{z_2-z_1}{|z_2-z_1|}e^{\pm i\alpha}$$

onde o ângulo α é determinado pela lei dos cossenos, aplicada ao triângulo de vértices z_1,z_2 e z:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

onde

$$a=R+R_2,\quad b=R+R_1,\quad c=|z_2-z_1|$$