Método de redução ao absurdo

João Nuno Tavares*, Ângela Geraldo [ǂ]
* Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
ǂ CMUP/ Universidade do Porto

CITAÇÃO
Tavares, J. N., Geraldo, A. (2017)
Métodos de redução ao absurdo,
Rev. Ciência Elem., V5(04):085.
doi.org/10.24927/rce2017.085

EDITOR
José Ferreira Gomes
Universidade do Porto

RECEBIDO EM
30 de novembro de 2012

ACEITE EM
21 de maio de 2013

PUBLICADO EM
31 de dezembro de 2017

O método de prova por redução ao absurdo

O método de redução ao absurdo é um método de prova matemática para validar se uma proposição do tipo:

$$P \Rightarrow Q$$

é verdadeira

Consiste no seguinte argumento: supômos que Q é falsa e provamos que então P também o é. Como? Em geral derivando uma "contradição" ou um "absurdo", isto é, algo incompatível com a veracidade assumida de P.

Exemplos

$\sqrt{2}$ é um número irracional

Usando o método de redução ao absurdo provar que: $\sqrt{2}$ é um número irracional

Note que isto pode ser posto na forma se ... então , ..., pondo se $\sqrt{2}$ é um número então $\sqrt{2}$ é irracional.

Suponho que $\sqrt{2}$ é um número racional e derivo uma contradição ou um absurdo.

Mas o que é um número racional? - é um número da forma $\frac{m}{n}$ com $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. De facto, e este é um elemento essencial na prova, podemos sempre supôr que a fracção $\frac{m}{n}$ é irredutível, isto é, que não existe qualquer inteiro ≠1 que divide simultâneamente m e n.

Agora a prova prossegue sem dificuldade:

suponho que $\sqrt{2}$ é um número racional, isto é, que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ e a fracção $\frac{m}{n}$ irredutível.

então $2 = \frac{m^2}{n^2}$ e portanto:

$$m^2=2n^2 \qquad \text{..............} \qquad (*)$$

o que significa que m^2 é par.

m^2 sendo par, m também tem que ser par. Porquê? porque se m fosse ímpar também m^2

o seria (prove isto).

logo existe um inteiro $k \in \mathbb{Z}$ tal que m=2k

substituindo na equação ($*$) vem que $(2k)^2=2n^2$, isto é, $n^2=2k^2$, o significa que n^2 é par.

sendo n^2 par n é também par

concluímos pois que m e n são ambos pares, isto é, são ambos divisíveis por 2.

mas isto é absurdo porque suposémos a fracção $\frac{m}{n}$ irredutível.

QED

Um outro

Utilizemos agora o método de redução ao absurdo para provar que:

Se a, b e c números inteiros ímpares então a equação quadrática $ax^2+bx+c=0$ não possui raízes racionais.

Suponhamos que p/q é uma raiz racional da equação acima, com p e q primos entre si. Assim, $a\left(\frac{p}{q}\right)^2+b\left(\frac{p}{q}\right)+c=0 \Rightarrow ap^2+bpq+cq^2=0$

Se p e q são ímpares, então $ap^2+bpq+cq^2$ também é ímpar, portanto não nulo e daí que p/q não seja solução da equação quadrática referida;

Se p é par e q é ímpar, então ap^2 é par, bpq é par e cq^2 é ímpar e portanto não nulo. Analogamente, se p é ímpar e q é par, $ap^2+bpq+cq^2$ é ímpar e assim não nulo;

Verificamos que $ap^2+bpq+cq^2$ não se anula nestas condições. Portanto, chegamos a uma contradição pois p/q não é uma raiz da equação quadrática $ax^2+bx+c=0$ com a, b e c números ímpares.

A contradição resultou do facto de termos suposto que esta equação tinha raízes racionais. Logo, a equação $ax^2+bx+c=0$ com a, b e c números inteiros ímpares não tem raízes racionais.