

—

Forças inerciais

Eduardo Lage
Universidade do Porto
ejslage@gmail.com

CITAÇÃO

Lage, E. (2018)
Forças inerciais,
Rev. Ciência Elem., V6(01):020.
doi.org/10.24927/rce2018.020

EDITOR

José Ferreira Gomes,
Universidade do Porto

EDITOR CONVIDADO

Luís Vítor Duarte,
Universidade de Coimbra

RECEBIDO EM

16 de fevereiro de 2018

ACEITE EM

26 de fevereiro de 2018

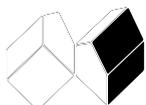
PUBLICADO EM

14 de março de 2018

COPYRIGHT

© Casa das Ciências 2018.
Este artigo é de acesso livre,
distribuído sob licença Creative
Commons com a designação
[CC-BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/), que permite
a utilização e a partilha para fins
não comerciais, desde que citado
o autor e a fonte original do artigo.

rce.casadasciencias.org



Estamos habituados a experimentar um tipo de forças algo estranhas: no arranque do automóvel, uma força atira-nos para trás (a que se opõe a reação exercida pelo encosto da cadeira) e, na travagem súbita uma força atira-nos para a frente (a que se opõe a reação do cinto de segurança que nos aperta o peito). O mesmo carro ao curvar parece atirar-nos para fora da curva e se, dentro de um autocarro que curva, dermos um passo em frente, somos atirados para o lado! As forças presentes nestes exemplos são designadas por inerciais e têm uma origem muito distinta das mais conhecidas forças entre dois corpos como são o caso das forças gravitacional e eletromagnética, manifestações de campos familiares (aos quais se devem juntar os campos das forças fracas - responsável pelo decaimento do neutrão - ou das forças fortes - responsável pela coesão do núcleo atómico). Mesmo forças bem conhecidas, como o atrito ou a viscosidade, são a resultante estatística de forças elétricas - tratamento estatístico porque envolvem muitos átomos ou moléculas; o mesmo se passa em colisões de corpos ou na natureza das forças que mantêm um livro em cima de uma mesa.

Qual é, então, a origem das forças inerciais? Para se perceber, devemos começar por lembrar o 1º Princípio de Newton - um corpo livre (isto é, infinitamente afastado de todos os outros) tem um movimento retilíneo e uniforme. Daqui decorre que se um corpo é livre para um tal observador, então também é livre para qualquer outro observador que, em relação ao primeiro, tenha um movimento uniforme e retilíneo. Tais observadores designam-se por inerciais e são, pois, equivalentes nas suas descrições de corpos livres. O 1º Princípio é, assim, uma afirmação de grande simetria e simplicidade e, na verdade, ele não é alterado pela teoria da relatividade restrita. Por outro lado, é óbvio que um tal corpo não tem aquele movimento para todos os observadores: estrelas distantes rodam em torno da Terra, mas atribuímos aquele movimento à rotação da Terra. Há, assim, observadores inerciais, para quem o 1º Princípio é verificado, e observadores não inerciais, para quem o mesmo Princípio não é verificado. E são estes observadores não inerciais que experimentam as forças inerciais exemplificadas acima. Observadores na Terra não são inerciais.

Ora, é, apenas, para os observadores inerciais que se aplica o 2º Princípio de Newton, i.e., um corpo deixa de ser livre e, portanto, deixa de ter movimento uniforme ou retilíneo, por ação de forças originadas em campos. Deste modo, a 2ª lei de Newton escreve-se $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$, i.e., a aceleração do corpo para um observador inercial é a força (conhecida) atuando sobre o corpo, dividida pela massa do corpo.

Considere-se, agora, um observador não inercial (será notado por O), dotado de um sis-

tema de eixos com versores $\vec{i}'(t)$, $\vec{j}'(t)$, $\vec{k}'(t)$ que, em geral, dependem do tempo, para o observador inercial, se tal sistema de eixos tiver rotação. Um qualquer corpo terá, para tal observador, uma velocidade e uma aceleração que serão notadas por uma plica. É fácil estabelecer a relação destas grandezas com as mesmas grandezas definidas para o observador inercial. Começando pela posição instantânea do corpo, tem-se:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{r}_0(t) \quad (1)$$

O 1º membro estabelece a posição do corpo em relação ao observador inercial; no 2º membro, $\vec{r}_0(t)$ denota a posição do observador não inercial em relação ao inercial; e $\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i}'(t) + y'(t)\vec{j}'(t) + z'(t)\vec{k}'(t)$. Note-se, aqui, quer as coordenadas do corpo considerado quer os versores dos eixos usados pelo observador não inercial, dependem do tempo: o corpo move-se em relação a este observador e este pode rodar em relação ao inercial. Se o corpo não se mover em relação aos observador O (não inercial), diremos que está rigidamente ligado a ele.

Derivando a eq. (1) em ordem ao tempo, obtemos a relação entre as velocidades:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t) + \vec{v}_0(t) \quad (2)$$

Aqui, o sinal \times denota produto vetorial; e

$$\vec{v}'(t) = x'(t)\vec{i}'(t) + y'(t)\vec{j}'(t) + z'(t)\vec{k}'(t)$$

é a velocidade do corpo em relação ao observador não inercial (o ponto significa derivada em ordem ao tempo); $\vec{\omega}(t)$ é a velocidade de rotação instantânea do referencial não inercial (em relação ao inercial), sendo definida pelas equações:

$$\frac{d}{dt}\vec{i}'(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{i}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}\vec{j}'(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{j}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}\vec{k}'(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{k}'(t)$$

Tal resulta de $\vec{i}'(t)$, $\vec{j}'(t)$, $\vec{k}'(t)$ serem versores (ortogonais entre si), pelo que as suas diferenciais são perpendiculares aos respetivos versores. É óbvio que se os eixos do observador O não rodarem, então os seus versores serão independentes do tempo e $\vec{\omega}(t) = 0$. Nesta caso, a eq. (2) reduz-se à lei de adição de velocidades de Galileu. Finalmente, $\vec{v}_0(t)$ é a velocidade do observador não inercial (a origem do seu sistema de eixos) em relação ao observador inercial. Coletivamente, a soma $\vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t) + \vec{v}_0(t)$ é designada por velocidade de transporte - seria a velocidade do corpo se rigidamente ligado ao observador, pelo que é a expressão da velocidade de um ponto genérico de um sólido rígido.

Uma nova derivação, em ordem ao tempo, da eq. (2) conduz-nos à relação entre as acelerações:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}'(t) + 2\vec{\omega}(t) \times \vec{v}'(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t)) + \dot{\vec{\omega}}(t) \times \vec{r}'(t) + \vec{a}_0(t) \quad (3)$$

onde:

$\vec{a}'(t)$ é a aceleração do corpo em relação ao observador O (não inercial);

$2\vec{\omega}(t) \times \vec{v}'(t)$ é designada por aceleração de Coriolis - só existe se o corpo se mover, em relação a O, e o sistema de eixos deste observador tiver rotação em relação ao observador inercial;

$\vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t))$ é a aceleração centrípeta, reduzindo-se a $-\omega(t)^2 \vec{r}'_\rho(t)$, $\vec{r}'_\rho(t)$ sendo a

componente de $\vec{r}'(t)$ perpendicular a $\omega(t)$, i.e., ao eixo de rotação;

$\vec{a}_0(t)$ é a aceleração do observador não inercial O em relação ao inercial.

Coletivamente, a soma $\vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t)) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t) + \vec{a}_0(t)$ é designada por aceleração de transporte - seria a aceleração do corpo se rigidamente ligado ao observador e, portanto, será a aceleração de um ponto genérico de um sólido.

Podemos, agora, regressar à 2ª lei de Newton, substituindo, no 1º membro, a aceleração $\vec{a}(t)$ pela expressão obtida, eq. (3). Resolvendo em ordem a $\vec{a}'(t)$, obtemos:

$$\vec{a}'(t) = \frac{\vec{F}}{m} - 2\vec{\omega}(t) \times \vec{v}'(t) - \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t)) - \dot{\vec{\omega}}(t) \times \vec{r}'(t) - \vec{a}_0(t) \quad (4)$$

Mas agora, olhando para esta equação, podemos reinterpretá-la como uma 2ª lei de Newton na qual, para além das forças \vec{F} , surgem devidas aos campos, surgem novas forças originadas por o observador O não ser inercial. Tais forças são coletivamente designadas por forças fictícias ou, preferencialmente, forças de inércia \vec{F}_i :

$$\vec{F}_i = -m [2\vec{\omega}(t) \times \vec{v}'(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t)) + \dot{\vec{\omega}}(t) \times \vec{r}'(t) + \vec{a}_0(t)] \quad (5)$$

No 2º membro, o 1º termo é a força de Coriolis. Os outros três termos são coletivamente designados por forças de transporte, reconhecendo-se a força centrífuga no 2º termo. Para aplicações na Terra, e para escalas de tempo inferiores a vários milhares de anos (período de precessão do eixo da Terra), o 3º termo é desprezável. Assim, se, na força \vec{F} for considerada, separadamente, a atração gravitacional da Terra, $m\vec{G}$, como se esta estivesse parada, então esta contribuição adicionada aos 3º e 4º termos na eq. (5), escreve-se na forma mais conhecida, i.e., $m\vec{g}$, onde, portanto, \vec{g} leva em conta não só a atração gravitacional como o efeito da força centrífuga, originando, assim, a variação da aceleração da gravidade \vec{g} com a latitude.

Note-se que as forças de inércia são proporcionais à massa, tal como o peso, e, por isso, são modernamente chamadas por forças gravíticas, designação que se entenderá melhor quando for discutida a teoria da relatividade geral.

Um exemplo simples: suponha-se que se larga um corpo do alto da torre dos Clérigos (altura $h=70m$). Considere-se o seguinte sistema de eixos: o eixo z tem a direção e sentido contrário à vertical do lugar (\vec{g}) que se pode determinar com um fio de prumo; o eixo x é tangente ao meridiano e aponta para Sul; e o eixo y é tangente ao paralelo, apontando para Este. Se se ignorar a força de Coriolis, um corpo largado livremente cai com movimento uniformemente acelerado $z=h - \frac{1}{2} g t^2$ e, portanto, a sua velocidade, em qualquer instante, é: $v_z = -gt$.

Sendo $\lambda \approx 45^\circ$ a latitude do lugar, o vetor rotação instantânea da Terra, com a direção e sentido do eixo da Terra e grandeza $\omega \approx \frac{2\pi}{24 \times 3600} s^{-1}$, faz um ângulo $\frac{\pi}{2} - \lambda$ com o eixo z. Assim, a força de Coriolis tem, nesta 1ª aproximação, a direção e sentido do eixo y, i.e., aponta para Este, resultando:

$$\frac{d^2}{dt^2} y = 2\omega \cos\lambda \cdot gt$$

Uma 1ª integração dá-nos a velocidade para Este (lembrando que o corpo é abandonado com velocidade nula):

$$\frac{d}{dt} y = \omega \cos\lambda \cdot g t^2$$

E nova integração dá o desvio para Este:

$$y = \frac{1}{3} \omega \cos \lambda g t^3$$

Assim, para os valores numéricos indicados, quando o corpo atinge o solo, $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 3.7$ s, o seu desvio para Este foi $y \approx 9$ mm.

Para maiores alturas de queda, o cálculo exato revela que a trajetória do grave é helicoidal.

Este exemplo mostra a grande vantagem de se ter usado um referencial não inercial (a Terra) porque é neste referencial que a experiência é executada e os seus resultados são reportados. Nada impede que a análise deste mesmo problema seja feita a partir de um referencial inercial, por exemplo, por um astronauta imóvel em relação ao Sol e longe da Terra. Como vê o astronauta o movimento do mesmo corpo largado do alto da torre? Para ele, a partir do momento em que é largado, o corpo fica apenas submetido à força gravítica da Terra determinada unicamente pela massa da Terra, não importando que o planeta esteja a rodar ou não - a força é $m\vec{g}$. Mas, agora, o corpo está animado de uma velocidade inicial, a velocidade do ponto no alto da torre de onde ele foi largado. Com estes dados, o astronauta pode calcular a trajetória balística do corpo e pode, assim, determinar onde ele irá chocar junto à base da torre, tendo, para isso, que levar em conta que a Terra rodou enquanto o corpo caía. Percebe-se que o cálculo seria bem mais elaborado, sendo, contudo fácil perceber por que o corpo atinge o chão a leste da vertical passando pelo alto da torre. De facto, quando o corpo é largado, a sua velocidade inicial é a velocidade da Terra naquela posição inicial, i.e., tangente ao paralelo passando pelo alto da torre. Esta velocidade é ligeiramente maior do que a velocidade da base da torre porque o alto da torre está mais afastado do eixo de rotação da Terra. Além disso, uma vez largado, o corpo só está submetido à força de gravidade, dirigida para o centro da Terra (suposta homogénea, para simplificar). Logo, não é alterada aquela componente da velocidade tangente ao paralelo. Assim quando atinge o solo, o corpo deslocou-se mais, na direção e sentido do paralelo, do que a base da torre - o ponto de impacto situa-se, pois, a leste da base da torre.



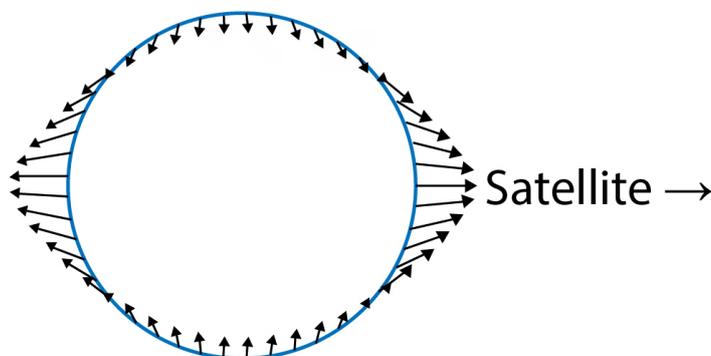
Muitos outros exemplos podem ser interpretados recorrendo às forças de inércia. A direção dominante dos ventos globais pode ser explicada qualitativamente. Não houvesse rotação da Terra, os ventos globais soprariam dos pólos (mais frios, maior pressão) para o equador (mais quente, menor pressão). Mas a Terra roda - a força de Coriolis altera este movimento, como mostra a figura.

Se a Terra não rodasse, um pêndulo simples oscilaria sempre no mesmo plano (designado por plano invariante). Mas a Terra roda fazendo aparecer, para os seus habitantes, a força de Coriolis, perpendicular à velocidade e, portanto, obrigando o plano de oscilação a rodar. É o pêndulo de Foucault, um método simples de exibir a rotação da Terra. O desenvolvimento mais detalhado deste interessante movimento não cabe aqui, mas é fácil perceber-lo, qualitativamente, em duas situações limites. Imagine-se o pêndulo num dos pólos geográficos. Aí, o seu plano de oscilação é invariante para o astronauta atrás referido e, portanto, executa uma rotação completa em um dia para o observador terrestre. Por outro lado, se o pêndulo

for colocado a oscilar no Equador, o seu plano de oscilação é arrastado pelo movimento da Terra, pelo que permanece invariante para um observador terrestre. Intui-se, deste modo, que a amplitude de oscilação do plano do pêndulo dá informações sobre a latitude do lugar.

Um outro exemplo é o girocompasso de Foucault, em tempos muito usado em navios. Trata-se de um cilindro maciço, suspenso pelo seu centro de gravidade (suspensão Cardan) e posto a girar por um motor que mantém uniforme a velocidade de rotação. A força de Coriolis tem resultante nula, mas não é nulo o seu momento resultante, pelo que o momento cinético do cilindro não é mais constante, o que origina uma oscilação do seu eixo em torno da direção Norte. De novo, a análise detalhada deste comportamento é deixada para outro artigo.

A explicação qualitativa das marés é um outro exemplo interessante. Começemos por ignorar o Sol e a rotação da Terra. Nestas condições, a superfície livre dos oceanos, que podem ser considerados em equilíbrio, seria esférica, coincidente com uma superfície isopotencial gravítico da Terra. Com a Terra em rotação, há que introduzir o efeito da força centrífuga, também ela derivada de um potencial com simetria cilíndrica (o eixo do cilindro é o eixo da Terra). Assim, o potencial total, soma dos anteriores, assemelhar-se-ia a uma esfera ligeiramente alongada no equador. Qual o efeito do Sol? Se, numa primeira aproximação, se considerar que a força gravítica do Sol é uniforme (em grandeza e intensidade), aquela superfície apenas seria ligeiramente deslocada, mas não deformada, em relação à parte sólida do planeta. Mas o Sol está a distância finita da Terra: a sua força de gravidade não é uniforme, sendo ligeiramente maior na parte dos oceanos voltada para o Sol e ligeiramente menor na parte dos mesmos oceanos mais afastada do Sol. Assim, a superfície livre dos oceanos deforma-se (em relação à forma quase esférica inicial), ficando mais alongada nas regiões mais próximas do Sol, que exerce maior atração, e também nas mais afastadas porque à menor atração do Sol se sobrepõe a força centrífuga. Imaginando o Sol a rodar em torno da Terra (é isso que vê um observador terrestre!), haverá marés cheias aproximadamente separadas por 12 horas. A não uniformidade do campo gravítico (do Sol, neste caso) é responsável por estas forças de maré. Numa primeira aproximação, bastante válida para o Sol, essa força é determinada pela derivada da intensidade do campo gravítico solar em ordem à distância ao centro da Terra, isto é, proporcionais ao inverso do cubo da distância. E este resultado mostra a importância da Lua nas marés: a força gravítica exercida pela Lua sobre a Terra é cerca de 5 milésimas da força exercida pelo Sol; mas as respetivas forças de maré são praticamente iguais. A periodicidade das marés é estabelecida quer pelo Sol quer pela Lua.



Por último, uma pergunta que o leitor certamente se colocou: existe algum observador inercial?

A resposta poderá ser surpreendente: um observador em queda livre na Terra é, para curtos tempos de queda e para curtas distâncias percorridas, um observador inercial. Designemo-lo por I e designemos por O um outro observador na Terra. Para este, I cai com movimento acelerado devido à atração da Terra. Imaginemos, agora, que I larga uma bola - ela cai, para O, com a mesma aceleração que I e, portanto, para I a bola estará em repouso. Imaginemos que I dá um impulso à bola; para O a aceleração da bola é igual à aceleração de I (enquanto a bola permanecer nas imediações de I). Então, para I, a bola não tem qualquer aceleração, afastando-se com movimento uniforme e retilíneo - para I a bola é um corpo livre que verifica o 1º Princípio e, portanto, ele é um observador inercial. Mas porque foi necessário referir curtos tempos e curtas distâncias? Porque o campo gravítico terrestre não é uniforme, sujeitando I às forças de maré. Tal observador pode verificar isso se largar, em repouso, quatro bolas definindo vértices de um quadrado vertical. Devido às forças de maré, o quadrado deforma-se (enquanto cai com I): o lado inferior, mais próximo da Terra, diminui o comprimento, porque todas as bolas seguem linhas de força do campo gravítico terrestre e estas confluem para o centro da Terra; e os lados laterais esticam, pelo mesmo motivo. O quadrado vai deformando num trapézio.



FIGURA 1. Experiência Zero-g a bordo de um Airbus A300. (fonte: ESA)

REFERÊNCIAS

¹ GOLDSTEIN, H. *et al.*, *Classical Mechanics*, Addison Wesley 3ª edição, 2001.

² FEYNMAN, R.P. *et al.*, *The Feynman Lectures on Physics*. San Francisco: Pearson/Addison-Wesley, Vol. 1, section 12-5, 2006. ISBN 0-8053-9049-9

³ LANDAU, L.D. e LIFSHITZ, E.M., *Mechanics. Course of Theoretical Physics*. Vol. 1 (3rd ed.). Butterworth-Heinenan, pp. 128-130, 1976.

