

Ângulo (medidas)

João Nuno Tavares, Ângela Geraldo

CMUP/ Universidade do Porto

jntavar@fc.up.pt

CITAÇÃO

Tavares, J. N., Geraldo, A. (2018) Ângulo (medidas), *Rev. Ciência Elem.*, V6(04):075. doi.org/10.24927/rce2018.075

EDITOR

José Ferreira Gomes, Universidade do Porto

EDITOR CONVIDADO

Jorge Manuel Canhoto, Universidade de Coimbra

RECEBIDO EM

23 de maio de 2013

ACEITE EM

23 de maio de 2013

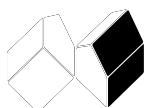
PUBLICADO EM

04 de dezembro de 2018

COPYRIGHT

© Casa das Ciências 2018. Este artigo é de acesso livre, distribuído sob licença Creative Commons com a designação [CC-BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/), que permite a utilização e a partilha para fins não comerciais, desde que citado o autor e a fonte original do artigo.

rce.casadasciencias.org



Quando um ponto P se move sobre uma circunferência, de centro O , rodando no sentido positivo (anti-horário), partindo de uma certa posição inicial Q , quando ele regressa a Q , após descrever uma volta inteira, diz-se que o ponto P (ou a semirreta OP , se preferir) descreveu um ângulo (de rotação) (orientado) igual a 360° .

Ângulos e rotações

Se o ponto descreve um quarto de volta, o ângulo (de rotação) será igual a $\frac{1}{4} \times 360^\circ = 90^\circ$. Um outro exemplo, 300° representa o valor do ângulo correspondente à rotação positiva de P de $\frac{300}{360} = \frac{15}{18}$ de volta inteira.

Quando P roda no sentido negativo (horário), os ângulos são negativos.

Não há qualquer razão matemática para que uma volta inteira corresponda a 360° , ou, de outra forma, para que a unidade de medida seja o grau, $\frac{1}{360}$ de volta inteira. De facto a única razão é de carácter histórico - é assim desde a antiguidade clássica. Como veremos, existe uma unidade de medida mais apropriada do ponto de vista matemático - o radiano.

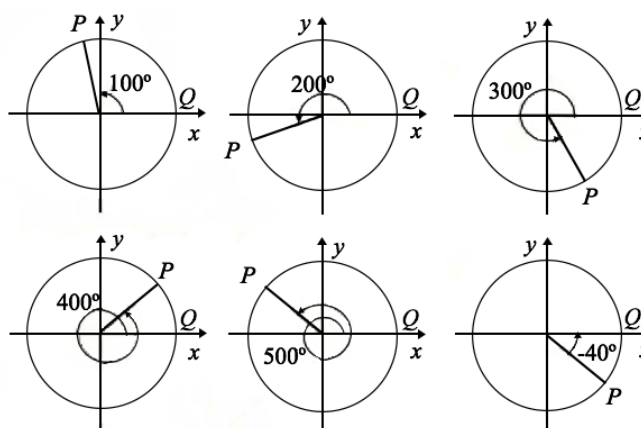


FIGURA 1. Ângulos de rotação.

Mas o que significa um ângulo (de rotação) de 500° ? Como $500^\circ = 360 + 140^\circ$, significa que o ponto P deu uma volta inteira, no sentido positivo, a que correspondem 360° , e depois continuou a rodar descrevendo um ângulo (de rotação) correspondente à rotação positiva de P de $\frac{140}{360} = \frac{7}{18}$ de volta inteira (veja a FIGURA 1).

Podemos pois definir ângulos de rotação ou, mais simplesmente, ângulos de qualquer valor, racional ou irracional, positivo ou negativo, medidos em graus.

Ângulos orientados

Noção de ângulo

Uma semirreta de origem O , pertencente a um dado plano, pode mover-se nesse plano rodando em torno de O em dois sentidos: ou no sentido contrário ao do movimento dos ponteiros do relógio que será o sentido positivo, ou no sentido oposto, sentido negativo.

Quando a semirreta partindo da posição a , roda em torno da origem O acabando por ocupar a posição b , diz-se que descreveu o ângulo $\angle a, b$. À semirreta a chamamos *lado origem* e à semirreta b *lado extremidade*. O ponto O é o vértice do ângulo.

Assim, o ângulo é positivo ou negativo, conforme o sentido de rotação que leva o lado origem a ocupar a posição lado extremidade seja positivo ou negativo. Nestas condições, a ordem pela qual se consideram lados do ângulo não é indiferente tendo o ângulo um sentido (*ângulo orientado*).

Quando a semirreta a descreve uma rotação em torno da origem O de tal forma que vem a ocupar a posição inicial, efetuando assim uma revolução completa num dado sentido, dizemos que essa semirreta descreveu o ângulo de um giro, ou mais simplesmente, um **ângulo giro**. E como nada impede que esse movimento de rotação continue (no sentido positivo ou negativo), concebem-se assim ângulos (positivos ou negativos) que podem exceder um ou mais ângulos giros.

Portanto, um par ordenado (a, b) de duas semirretas com a mesma origem O corresponde a um ser geométrico múltiplo chamado **ângulo trigonométrico**, constituído por um número infinito de determinações, cada uma das quais se refere à amplitude e sentido da rotação que leva o lado origem a coincidir com o lado extremidade.

Medida dos ângulos

Se A e U forem duas grandezas (da mesma espécie contínua) e se U for não nula, existe um e um só número real α tal que, $A = \alpha U$. A este número α chama-se a medida de A relativamente a U . Determinar α é medir a grandeza A tomando para unidade a grandeza U .

Considerando agora os ângulos orientados, podemos afirmar que dadas duas determinações A e U , (U não nulo), de dois ângulos, existe um e um só número real m tal que, $A = mU$. O número m representa assim a medida da determinação do ângulo A relativamente à unidade U .

Fixada a unidade U estabelece-se assim uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos *ângulos orientados* e conjunto dos *números reais* (medidas dos ângulos). Esta correspondência é tal que a relação de igualdade, a relação de grandeza e a adição de **ângulos** se traduz, respetivamente, na relação de igualdade, na relação de grandeza e na adição de **números reais**.

A escolha da unidade U é arbitrária, mas habitualmente usa-se um dos três sistemas de unidades definidos em seguida.

Sistema sexagesimal

No sistema sexagesimal admite-se como unidade fundamental o **grau**. Um grau corres-

ponde a $\frac{1}{90}$ do ângulo reto que por sua vez é um quarto de um ângulo giro.

Assim sendo, um ângulo reto mede 90° (90 graus) e um ângulo giro mede 360° (360 graus) pois $90 \times 4 = 360$.

Como submúltiplos do grau usam-se:

O **minuto sexagesimal** ($1'$) corresponde a $\frac{1}{60}$ do grau, ou seja, 60 minutos sexagesimais são 1 grau.

O **segundo sexagesimal** ($1''$) corresponde a $\frac{1}{60}$ do minuto e portanto $\frac{1}{3600}$ do grau, ou seja, 3600 segundos sexagesimais são 1 grau.

O **décimo do segundo**, o **centésimo do segundo** etc.

Submúltiplos do grau	Um grau
Minutos	60
Segundos	3600
Décimos de segundo	36000
Centésimos do segundo	360000
...	...

Exemplo

Um ângulo composto de 30 graus, 12 minutos, 8 segundos e 2 centésimos que simbolicamente podemos representar por $30^\circ 12' 8''$, 02 tem uma medida em graus de $30 + \frac{12}{60} + \frac{8}{3600} + \frac{2}{360 \times 100} \approx 30,2023$.

Para indicar a medida deste ângulo usamos habitualmente a notação $30^\circ 12' 8''$, 02 para nos referirmos ao número anterior.

Sistema centesimal

No sistema centesimal admite-se como unidade fundamental o **grado**. Um grado corresponde a $\frac{1}{100}$ do ângulo reto que por sua vez é um quarto de um ângulo giro.

Assim sendo, um ângulo reto mede 100° (100 grados) e um ângulo giro mede 400° (400 grados) pois $100 \times 4 = 400$.

Como submúltiplos do grado usam-se:

O **minuto centesimal** ($1'$) corresponde a $\frac{1}{100}$ do grau, ou seja, 100 minutos centesimais são 1 grado.

O **segundo centesimal** ($1''$) corresponde a $\frac{1}{100}$ do minuto e portanto $\frac{1}{10000}$ do grado, ou seja, 10000 segundos centesimais são 1 grado.

O **décimo do segundo centesimal**, o **centésimo do segundo centesimal** etc.

Submúltiplos do grado	Um grado
Minutos	100
Segundos	10000
Décimos de segundo centesimal	100000
Centésimos do segundo centesimal	1000000
...	...

Exemplo

Um ângulo composto de 20 graus, 8 minutos e 24 segundos que simbolicamente podemos representar por $20^{\circ} 8' 24''$ tem uma medida em graus de $20 + \frac{8}{100} + \frac{24}{10000} = 20,0824$.

Para indicar a medida deste ângulo no sistema centesimal usamos habitualmente a notação $20^{\circ} 8' 24''$ para nos referirmos ao número anterior.

Sistema circular

No sistema circular a unidade de medida é o radiano. Como sabemos um radiano é a medida de um ângulo ao centro definido num círculo por um arco com o mesmo comprimento que o raio do círculo. Sabemos também que existe proporcionalidade direta entre a medida de um ângulo ao centro e o comprimento do arco correspondente. Considerando o ângulo da FIGURA 1 podemos então estabelecer que:

$$\frac{\text{medida de um radiano}}{\text{medida de um ângulo giro}} = \frac{\text{comprimento do arco } AB}{\text{comprimento da circunferência}}$$

Como o comprimento do arco AB é igual ao raio do círculo, resulta que

$$\frac{\text{medida de um radiano}}{\text{medida de um ângulo giro}} = \frac{r}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi}$$

Esta relação mostra que a medida de um *ângulo giro* é de 2π radianos. Estabelecendo a relação com os dois sistemas de unidades anteriores temos que:

$$360^{\circ} = 2\pi \text{ radianos} \quad \text{e} \quad 400^{\circ} = 2\pi \text{ radianos}$$

Daqui resulta que,

$$1 \text{ radiano} = \left(\frac{360}{2\pi}\right)^{\circ} \approx 57^{\circ} 17' 45''$$

$$1 \text{ radiano} = \left(\frac{400}{2\pi}\right)^{\circ} \approx 63,6620^{\circ}$$

Passagem de um sistema de unidades para outro

Consideremos um ângulo $\angle a, b$ qualquer e designemos por s, c e d as suas medidas nos sistemas sexagesimal, centesimal e circular, respetivamente. Necessitamos de estabelecer uma relação destas medidas com medidas já conhecidas, como por exemplo, a medida de um *ângulo raso*, que é de 180° no sistema sexagesimal, de 200° no centesimal e de π rad no circular. Como a razão entre grandezas da mesma espécie é o quociente das suas medidas relativamente a uma unidade comum, resulta que a razão entre o ângulo $\angle a, b$ e o ângulo raso pode ser expressa pelos números $\frac{s}{180}$, $\frac{c}{200}$ ou por $\frac{d}{\pi}$.

Como os três números anteriores são iguais então temos que:

$$\frac{s}{180} = \frac{c}{200} = \frac{d}{\pi}$$

Esta relação permite-nos, conhecendo a medida de um ângulo num dos sistemas, determinar a medida desse mesmo ângulo num dos outros dois sistemas de unidades.

Exemplo

Cálculo das medidas do ângulo $28^\circ 48'$ nos sistemas centesimal e circular.

Usando a relação anterior temos que $s = 28,8$ pois $48' = 0,8^\circ$, então

$$\frac{28,8}{180} = \frac{c}{200} \Leftrightarrow c = \frac{200 \times 28,8}{180} = 32$$

Da mesma forma determinamos a medida do ângulo no sistema circular:

$$\frac{28,8}{180} = \frac{d}{\pi} \Leftrightarrow d = \frac{\pi \times 28,8}{180} = \frac{28,8}{180} \pi = \frac{4}{25} \pi \simeq 0,503$$

Logo, o ângulo $28^\circ 48'$ mede 32° no sistema centesimal e aproximadamente $0,503$ rad no sistema circular.

Notas históricas

Dos três sistemas de unidade descritos anteriormente é o sistema circular que parece suscitar maior interesse *teórico* pela quantidade de assuntos matemáticos em que intervém. Já os outros dois sistemas, sistema sexagesimal e sistema centesimal, são mais utilizados nas aplicações práticas mais elementares.

O **sistema sexagesimal** será, dos três sistemas de unidades, o mais antigo, como podemos ler na *Enciclopédia das Matemáticas Elementares*, “*O sistema sexagesimal é de origem remotíssima. Os Babilónios dividiam a circunferência em 360 partes iguais e esta subdivisão transmitiu-se aos Gregos e Árabes e chegou até nós*”.

O **sistema centesimal** parece datar do séc. XV. O notável geómetra H. Briggs (1556-1630) utilizou a subdivisão centesimal na construção duma tábua trigonométrica. Mais tarde, o matemático francês J. L. Lagrange (1736-1813) mostrou-se defensor da substituição do sistema sexagesimal pelo sistema centesimal de unidades de medida de ângulo. Apesar do sistema centesimal ser mais cómodo a nível de cálculo, uma vez que se usam medidas expressas em números decimais, ainda hoje podemos verificar que o sistema mais utilizado e mais comum é o sistema sexagesimal.

REFERÊNCIAS

¹J. JORGE G. CALADO, *Compêndio de Trigonometria* 4ªedição. Liv. Popular de Francisco Franco, Lisboa, 1974.