REVISTA DE CIÊNCIA ELEMENTAR

# Ângulo (medidas)

João Nuno Tavares, Ângela Geraldo
CMUP/ Universidade do Porto
jntavar@fc.up.pt

**CITAÇÃO**
Tavares, J. N., Geraldo, A. (2018)
Ângulo (medidas),
*Rev. Ciência Elem.*, V6(04):075.
doi.org/10.24927/rce2018.075

**EDITOR**
José Ferreira Gomes,
Universidade do Porto

**EDITOR CONVIDADO**
Jorge Manuel Canhoto,
Universidade de Coimbra

**RECEBIDO EM**
23 de maio de 2013

**ACEITE EM**
23 de maio de 2013

**PUBLICADO EM**
04 de dezembro de 2018



**rce.casadasciencias.org**

**Quando um ponto $P$ se move sobre uma circunferência, de centro $O$, rodando no sentido positivo (anti-horário), partindo de uma certa posição inicial $Q$, quando ele regressa a $Q$, após descrever uma volta inteira, diz-se que o ponto $P$ (ou a semirreta $OP$, se preferir) descreveu um ângulo (de rotação) (orientado) igual a $360^{\circ}$.**

## Ângulos e rotações

Se o ponto descreve um quarto de volta, o ângulo (de rotação) será igual a $\frac{1}{4} \times 360^{\circ} = 90^{\circ}$. Um outro exemplo, $300^{\circ}$ representa o valor do ângulo correspondente à rotação positiva de $P$ de $\frac{300}{360} = \frac{15}{18}$ de volta inteira.

Quando $P$ roda no sentido negativo (horário), os ângulos são negativos.

Não há qualquer razão matemática para que uma volta inteira corresponda a $360^{\circ}$, ou, de outra forma, para que a unidade de medida seja o grau, $\frac{1}{360}$ de volta inteira. De facto a única razão é de carácter histórico - é assim desde a antiguidade clássica. Como veremos, existe uma unidade de medida mais apropriada do ponto de vista matemático - o radiano.

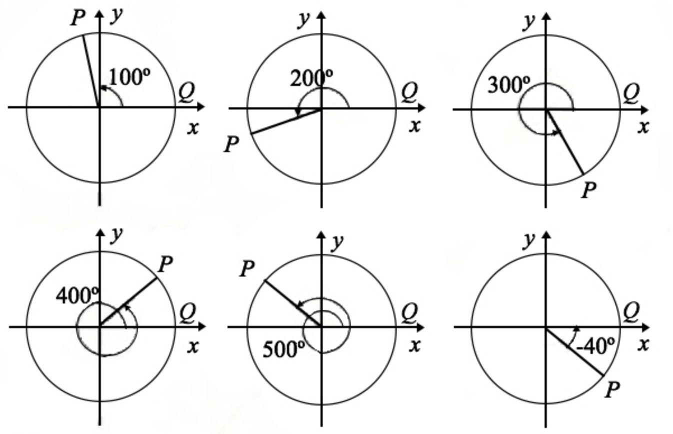


FIGURA 1. Ângulos de rotação.

Mas o que significa um **ângulo** (**de rotação**) de $500^{\circ}$? Como $500^{\circ} = 360 + 140^{\circ}$, significa que o ponto $P$ deu uma volta inteira, no sentido positivo, a que correspondem $360^{\circ}$, e depois continuou a rodar descrevendo um ângulo (de rotação) correspondente à rotação positiva de $P$ de $\frac{140}{360} = \frac{7}{18}$ de volta inteira (veja a FIGURA 1).

Podemos pois definir ângulos de rotação ou, mais simplesmente, ângulos de qualquer valor, racional ou irracional, positivo ou negativo, medidos em graus.

## Ângulos orientados

**Noção de ângulo**

Uma semirreta de origem $O$, pertencente a um dado plano, pode mover-se nesse plano rodando em torno de $O$ em dois sentidos: ou no sentido contrário ao do movimento dos ponteiros do relógio que será o sentido positivo, ou no sentido oposto, sentido negativo.

Quando a semirreta partindo da posição $a$, roda em torno da origem $O$ acabando por ocupar a posição $b$, diz-se que descreveu o ângulo $\angle a, b$. À semirreta $a$ chamamos *lado origem* e à semirreta $b$ *lado extremidade*. O ponto $O$ é o vértice do ângulo.

Assim, o ângulo é positivo ou negativo, conforme o sentido de rotação que leva o lado origem a ocupar a posição lado extremidade seja positivo ou negativo. Nestas condições, a ordem pela qual se consideram lados do ângulo não é indiferente tendo o ângulo um sentido (*ângulo orientado*).

Quando a semirreta $a$ descreve uma rotação em torno da origem $O$ de tal forma que vem a ocupar a posição inicial, efetuando assim uma revolução completa num dado sentido, dizemos que essa semirreta descreveu o ângulo de um giro, ou mais simplesmente, um **ângulo giro**. E como nada impede que esse movimento de rotação continue (no sentido positivo ou negativo), concebem-se assim ângulos (positivos ou negativos) que podem exceder um ou mais ângulos giros.

Portanto, um par ordenado $(a,b)$ de duas semirretas com a mesma origem $O$ corresponde a um ser geométrico múltiplo chamado **ângulo trigonométrico**, constituído por um número infinito de determinações, cada uma das quais se refere à amplitude e sentido da rotação que leva o lado origem a coincidir com o lado extremidade.

**Medida dos ângulos**

Se $A$ e $U$ forem duas grandezas (da mesma espécie contínua) e se $U$ for não nula, existe um e um só número real $\alpha$ tal que, $A = \alpha U$. A este número $\alpha$ chama-se a medida de $A$ relativamente a $U$. Determinar $\alpha$ é medir a grandeza $A$ tomando para unidade a grandeza $U$.

Considerando agora os ângulos orientados, podemos afirmar que dadas duas determinações $A$ e $U$, ($U$ não nulo), de dois ângulos, existe um e um só número real $m$ tal que, $A = mU$. O número m representa assim a medida da determinação do ângulo $A$ relativamente à unidade $U$.

Fixada a unidade $U$ estabelece-se assim uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos *ângulos orientados e conjunto dos números reais* (medidas dos ângulos). Esta correspondência é tal que a relação de igualdade, a relação de grandeza e a adição de **ângulos** se traduz, respetivamente, na relação de igualdade, na relação de grandeza e na adição de **números reais**.

A escolha da unidade $U$ é arbitrária, mas habitualmente usa-se um dos três sistemas de unidades definidos em seguida.

## Sistema sexagesimal

No sistema sexagesimal admite-se como unidade fundamental o **grau**. Um grau corresponde a $\frac{1}{90}$ do ângulo reto que por sua vez é um quarto de um ângulo giro.

Assim sendo, um ângulo reto mede $90^o$ ($90$ graus) e um ângulo giro mede $360^o$ ($360$ graus) pois $90 \times 4 = 360$.

Como submúltiplos do grau usam-se:

O **minuto sexagesimal** ($1'$) corresponde a $\frac{1}{60}$ do grau, ou seja, $60$ minutos sexagesimais são $1$ grau.

O **segundo sexagesimal** ($1''$) corresponde a $\frac{1}{60}$ do minuto e portanto $\frac{1}{3600}$ do grau, ou seja, 3600 segundos sexagesimais são $1$ grau.

O **décimo do segundo**, o **centésimo do segundo** etc.

| Submúltiplos do grau | Um grau |
|---|---|
| Minutos | 60 |
| Segundos | 3600 |
| Décimos de segundo | 36000 |
| Centésimos do segundo | 360000 |
| ... | ... |

**Exemplo**

Um ângulo composto de $30$ graus, $12$ minutos, $8$ segundos e $2$ centésimos que simbolicamente podemos representar por $30^o\ 12'\ 8'', 02$ tem uma medida em graus de $30 + \frac{12}{60} + \frac{8}{3600} + \frac{2}{360 \times 100} \simeq 30,2023$.

Para indicar a medida deste ângulo usamos habitualmente a notação $30^o\ 12'\ 8'', 02$ para nos referirmos ao número anterior.

## Sistema centesimal

No sistema centesimal admite-se como unidade fundamental o **grado**. Um grado corresponde a $\frac{1}{100}$ do ângulo reto que por sua vez é um quarto de um ângulo giro.

Assim sendo, um ângulo reto mede $100^g$ (100 grados) e um ângulo giro mede $400^g$ (400 grados) pois $100 \times 4 = 400$.

Como submúltiplos do grado usam-se:

O **minuto centesimal** ($1'$) corresponde a $\frac{1}{100}$ do grau, ou seja, 100 minutos centesimais são 1 grado.

O **segundo centesimal** ($1''$) corresponde a $\frac{1}{100}$ do minuto e portanto $\frac{1}{10000}$ do grado, ou seja, 10000 segundos centesimais são $1$ grado.

O **décimo do segundo centesimal**, o **centésimo do segundo centesimal** etc.

| Submúltiplos do grado | Um grado |
|---|---|
| Minutos | 100 |
| Segundos | 10000 |
| Décimos de segundo centesimal | 100000 |
| Centésimos do segundo centesimal | 1000000 |
| ... | ... |

**Exemplo**

Um ângulo composto de $20$ grados, $8$ minutos e $24$ segundos que simbolicamente podemos representar por $20^g\ 8'\ 24''$ tem uma medida em grados de $20+\frac{8}{100}+\frac{24}{10000}=20,0824$ .

Para indicar a medida deste ângulo no sistema centesimal usamos habitualmente a notação $20^g\ 8'\ 24''$ para nos referirmos ao número anterior.

## Sistema circular

No sistema circular a unidade de medida é o radiano. Como sabemos um radiano é a medida de um ângulo ao centro definido num círculo por um arco com o mesmo comprimento que o raio do círculo. Sabemos também que existe proporcionalidade direta entre a medida de um ângulo ao centro e o comprimento do arco correspondente. Considerando o ângulo da FIGURA 1 podemos então estabelecer que:

$$\frac{\text{medida de um radiano}}{\text{medida de um ângulo giro}}=\frac{\text{comprimento do arco } AB}{\text{comprimento da circunferência}}$$

Como o comprimento do arco $AB$ é igual ao raio do círculo, resulta que

$$\frac{\text{medida de um radiano}}{\text{medida de um ângulo giro}}=\frac{r}{2\pi r}=\frac{1}{2\pi}$$

Esta relação mostra que a medida de um *ângulo giro* é de $2\pi$ radianos. Estabelecendo a relação com os dois sistemas de unidades anteriores temos que:

$$360^{\circ}=2\pi \text{ radianos} \qquad \text{e} \qquad 400^{g}=2\pi \text{ radianos}$$

Daqui resulta que,

$$1 \text{ radiano}=\left(\frac{360}{2\pi}\right)^{\circ}\simeq 57^{\circ}\ 17'\ 45''$$

$$1 \text{ radiano}=\left(\frac{400}{2\pi}\right)^{g}\simeq 63,6620^{g}$$

## Passagem de um sistema de unidades para outro

Consideremos um ângulo $\angle a,b$ qualquer e designemos por $s$, $c$ e $d$ as suas medidas nos sistemas sexagesinal, centesimal e circular, respetivamente. Necessitamos de estabelecer uma relação destas medidas com medidas já conhecidas, como por exemplo, a medida de um *ângulo raso*, que é de $180^{\circ}$ no sistema sexagesimal, de $200^{g}$ no centesimal e de $\pi$ rad no circular. Como a razão entre grandezas da mesma espécie é o quociente das suas medidas relativamente a uma unidade comum, resulta que a razão entre o ângulo $\angle a,b$ e o ângulo raso pode ser expressa pelos números $\frac{s}{180}$, $\frac{c}{200}$ ou por $\frac{d}{\pi}$ .

Como os três números anteriores são iguais então temos que:

$$\frac{s}{180} = \frac{c}{200} = \frac{d}{\pi}$$

Esta relação permite-nos, conhecendo a medida de um ângulo num dos sistemas, determinar a medida desse mesmo ângulo num dos outros dois sistemas de unidades.

**Exemplo**

Cálculo das medidas do ângulo $28^{\circ}\ 48'$ nos sistemas centesimal e circular.

Usando a relação anterior temos que $s = 28{,}8$ pois $48' = 0{,}8^{\circ}$, então

$$\frac{28,8}{180} = \frac{c}{200} \Leftrightarrow c = \frac{200 \times 28,8}{180} = 32$$

Da mesma forma determinamos a medida do ângulo no sistema circular:

$$\frac{28,8}{180} = \frac{d}{\pi} \Leftrightarrow d = \frac{\pi \times 28,8}{180} = \frac{28,8}{180}\pi = \frac{4}{25}\pi \simeq 0,503$$

Logo, o ângulo $28^{\circ}\ 48'$ mede $32^{\text{g}}$ no sistema centesimal e aproximadamente $0{,}503\ \text{rad}$ no sistema circular.

## Notas históricas

Dos três sistemas de unidade descritos anteriormente é o sistema circular que parece suscitar maior interesse *teórico* pela quantidade de assuntos matemáticos em que intervém. Já os outros dois sistemas, sistema sexagesimal e sistema centesimal, são mais utilizados nas aplicações práticas mais elementares.

O **sistema sexagesimal** será, dos três sistemas de unidades, o mais antigo, como podemos ler na *Enciclopédia das Matemáticas Elementares*, "*O sistema sexagesimal é de origem remotíssima. Os Babilónios dividiam a circunferência em 360 partes iguais e esta subdivisão transmitiu-se aos Gregos e Árabes e chegou até nós*".

O **sistema centesimal** parece datar do séc. XV. O notável geómetra H. Briggs (1556-1630) utilizou a subdivisão centesimal na construção duma tábua trigonométrica. Mais tarde, o matemático francês J. L. Lagrange (1736-1813) mostrou-se defensor da substituição do sistema sexagesimal pelo sistema centesimal de unidades de medida de ângulo. Apesar do sistema centesimal ser mais cómodo a nível de cálculo, uma vez que se usam medidas expressas em números decimais, ainda hoje podemos verificar que o sistema mais utilizado e mais comum é o sistema sexagesimal.

### REFERÊNCIAS

[1] J. JORGE G. CALADO, *Compêndio de Trigonometria* 4ªedição. Liv. Popular de Francisco Franco, Lisboa, 1974.