REVISTA DE CIÊNCIA ELEMENTAR

Princípio de indução matemática

João Nuno Tavares*, Ângela Geraldo[ǂ]

* Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

ǂ CMUP/ Universidade do Porto

CITAÇÃO

Tavares, J. N., Geraldo, A.(2018)
Congruências,
Rev. Ciência Elem., V6(01):087.
doi.org/10.24927/rce2018.087

EDITOR

José Ferreira Gomes
Universidade do Porto

RECEBIDO EM

08 de janeiro de 2013

ACEITE EM

11 de janeiro de 2013

PUBLICADO EM

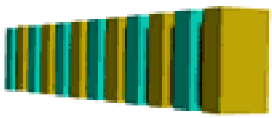
31 de março de 2018

Princípio de indução matemática

O Principio de indução matemática diz o seguinte - seja P(n) uma proposição que depende de um inteiro natural n$\in \mathbb{N}$. Então:

- **se P(1) é verdadeira, e se**
- $\forall$**n**$\in \mathbb{N}$ **se P(n) é verdadeira então P(n+1) também o é**

a proposição P(n) é verdadeira $\forall$**n**$\in \mathbb{N}$**. O princípio serve pois para provar proposições do tipo** $\forall$**n**$\in \mathbb{N}$**, P(n).**



Exemplos

Exemplo 1

Podemos usar o princípio de indução matemática para mostrar que:

$$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n\,(n+1)}{2}$$

Neste caso $P\,(n)=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n\,(n+1)}{2}$. Portanto,

$P\,(1)=1=\dfrac{1\,(1+1)}{2}$ e

$$P\,(n+1)=1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}\,.$$

1. $P\,(1)=1=\dfrac{1\,(1+1)}{2}$ é verdadeira.

2. Supomos agora que P(n) é verdadeira, ou seja, a hipótese de indução. Queremos mostrar que P(n+1) também é verdadeira.

$1+2+3+\cdots+n+(n+1)$	=	$(1+2+3+\cdots+n)+(n+1)$
		$\dfrac{n(n+1)}{2}+(n+1)$, pela hipótese de indução
		$\dfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ QED

Exemplo 2

Outro exemplo da aplicação do princípio de indução matemática pode ser visto na demonstração de:

$$17^n - 10^n \text{ é múltiplo de 7, } \forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}$$

1. $P(1)=1=17^1-10^1=7$, que é múltiplo de 7, portanto P(1) é verdadeira.
2. Supomos agora que P(n) é verdadeira, ou seja, a hipótese de indução. Queremos mostrar que P(n+1) também é verdadeira.

17n+1-10n+1	=	$17^n \cdot 17 - 10^n \cdot 10$
	=	$17^n \cdot 17 - 10^n \cdot 10 - 17^n \cdot 10 + 17^n \cdot 10$
	=	$17^n \cdot 17 - 17^n \cdot 10 + 17^n \cdot 10 - 10^n \cdot 10$
	=	$17^n \cdot (17-10) + 10 \cdot (17^n - 10^n)$
	=	$17^n \cdot 7 + 10 \cdot$ (múltiplo de 7), pela hipótese de indução
	=	múltiplo de 7 QED

Exemplo 3

Considere n rectas no plano que estão em posição geral, isto é, - duas quaisquer intersectam-se (não há paralelas) e - não existem 3 ou mais que se intersectam num único ponto.

Em quantas partes dividem o plano?

Designemos por P(n)= número de partes em que as n rectas em posição geral dividem o plano.

Para n=1, é claro que P(1)=2.

Suponhamos que conhecemos P(n) e determinemos P(n+1). Consideremos pois n+1 rectas em posição geral no plano. As n primeiras destas rectas dividem o plano em P(n)= partes. A última, chamemos-lhe l, intersecta as n primeiras em n pontos distintos que dividem a recta l em n+1 pontos distintos (veja o applet com n=3 rectas, com P(3)=7 partes, e n+1=4 rectas e P(4)=11 partes).

Portanto, a recta l tem pontos comuns com n+1 das partes determinadas pelas n primeiras rectas a que se vêm juntar n+1 novas partes (veja o applet: às P(3)=7 partes determinadas pelas 3 primeiras rectas, juntam-se 4 novas partes).

Concluindo

$$P\left(n+1\right)=P\left(n\right)+\left(n+1\right)$$

Fazendo nesta igualdade n sucessivamente igual a n−1,n−2,Ð,2,1, obtemos

$$\begin{gathered}P\left(n\right)=P\left(n-1\right)+n\\ P\left(n-1\right)=P\left(n-2\right)+\left(n-1\right)\\ \vdots\\ P\left(3\right)=P\left(2\right)+3\\ P\left(2\right)=P\left(1\right)+2\end{gathered}$$

Somando estas igualdades, simplificando e atendendo a que P(1)=2, obtemos

$$\begin{gathered}P\left(n\right)=P\left(1\right)+\left[n+\left(n-1\right)+\cdots+2\right]\\ =1+\left[n+\left(n-1\right)+\cdots+1\right]\\ 1+\tfrac{n(n+1)}{2}\\ =\tfrac{n^2+n+2}{2}\end{gathered}$$