Diferencial

João Nuno Tavares*, Ângela Geraldo [‡]

* Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

[‡] CMUP/ Universidade do Porto

CITAÇÃO

Tavares, J. N., Geraldo, A.(2018)
Diferencial,
Rev. Ciência Elem., V6(01):088.
doi.org/10.24927/rce2018.088

EDITOR

José Ferreira Gomes
Universidade do Porto

RECEBIDO EM

25 de novembro de 2009

ACEITE EM

14 janeiro de 2010

PUBLICADO EM

31 de março de 2018

rce.casadasciencias.org

Dada uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$«», suponha que existe a derivada de f num ponto a, interior ao domínio de f. Considere os pontos A(a,f(a)) e B(a+h,f(a+h)) e, com h≠0, ambos sobre o gráfico de f, e a recta que os une.

Qual a equação cartesiana desta recta?

Como se sabe da geometria analítica plana, a equação da recta que une os pontos A e B é:

$$y - f(a) = \frac{f(a+h)}{(a+h)-a}(x-a)$$

ou:

$$y = f(a) + \Delta_a f(h)(x-a)$$

Portanto o declive desta recta, isto é, a tangente do ângulo positivo que esta recta faz com a parte positiva do eixo dos xx, é igual à taxa média de variação de f em a.

Qual a posição limite desta recta quando h→0?

Quando h→0 a taxa média de variação de f em a, Δ_af,converge para a taxa instantânea de variação de f em a, isto é, converge para a derivada f'(a) de f em a (supondo que esta existe).

Portanto a recta que une A e B tem uma posição limite que não é mais do que a recta tangente ao gráfico de f no ponto A=(a,f(a)). A respectiva equação é obtida a partir da equação anterior em , fazendo h→0:

y=f(a)+f'(a)(x−a)

O declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto A=(a,f(a)), é pois igual à derivada f'(a) de f em a.

Considere ainda os pontos seguintes:

B=(a+h,f(a+h)), no gráfico de f e B'=(a+h,f(a)+f'(a)h), na recta tangente ao gráfico de f no ponto A(a,f(a))

A diferença das ordenadas destes dois pontos é igual a:

f(a+h)−[f(a)+f'(a)h]

e esta diferença é cada vez mais pequena quanto mais próximo de 0 estiver o "acréscimo" h. Neste sentido podemos pois dizer que o valor exacto \displaystyle f(a+h) é aproximadamente igual a f(a)+f'(a)h, sendo esta aproximação cada vez mais precisa quanto mais pequeno é o valor de h:

$f(a+h) \approx f(a)+f'(a)h$

Mais concretamente: se definirmos o erro e(a;h) através da diferença:

$e(a;h) \doteq f(a+h)-[f(a)+f'(a)h]$

podemos dizer que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e\,(a;h)}{h} = 0$$

Diz-se então que o erro e(a;h) é um infinitésimo de ordem superior a h.

A diferencial da função f no ponto a, é a função $df_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a cada acréscimo $h \in \mathbb{R}$ associa o valor $df_a \doteq f'(a) \cdot h$. É pois uma função linear em h - de facto a função linear que melhor aproxima f em a, no sentido em que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f\,(a+h) - f\,(a)) - df_a\,(h)}{h} = 0$$

que não é mais do que a versão formal do que se disse antes, e que se presta a generalização.