REVISTA DE CIÊNCIA ELEMENTAR

Número de ouro

João Nuno Tavares, Ângela Geraldo
CMUP/ Universidade do Porto
jntavar@fc.up.pt

CITAÇÃO
Tavares, J. N., Geraldo, A. (2019)
Número de ouro,
Rev. Ciência Elem., V7(01):008
doi.org/10.24927/rce2019.008

EDITOR
José Ferreira Gomes,
Universidade do Porto

EDITOR CONVIDADO
Paulo Ribeiro-Claro,
Universidade de Aveiro

RECEBIDO EM
08 de dezembro de 2012

ACEITE EM
05 de fevereiro de 2019

PUBLICADO EM
12 de março de 2019

rce.casadasciencias.org

A **secção de ouro** ou **razão de ouro** é uma proporção que surge em várias situações geométricas e aritméticas. A mais simples é a seguinte (Euclides): consideremos um segmento de comprimento ℓ e dividamo-lo em duas partes desiguais - uma maior e outra mais pequena. Esta divisão diz-se que está na razão de ouro (ou na **proporção divina**) quando:

$$\frac{\text{segmento total}}{\text{parte maior}} = \frac{\text{parte maior}}{\text{parte mais pequena}}$$

Se x representa o comprimento da parte maior, a que é igual x?
De acordo com a proporção divina, temos que:

$$\frac{\text{segmento total}}{\text{parte maior}} = \frac{\text{parte maior}}{\text{parte mais pequena}} \Longleftrightarrow \frac{\ell}{x} = \frac{x}{\ell - x}$$

e, portanto, x é solução da equação do 2º grau:

$$x^2 + \ell x - \ell^2 = 0$$

As soluções são, aplicando a fórmula resolvente:

$$x = \frac{\ell, \pm\sqrt{\ell^2 + 4\ell^2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \ell$$

Sendo x um comprimento só nos interessa a solução positiva que é:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \ell$$

Número de ouro

Se Φ representa o valor comum das duas frações que surgem na proporção divina, qual o valor de Φ?

Por definição $\Phi = \dfrac{\text{segmento total}}{\text{parte maior}} = \dfrac{\text{parte maior}}{\text{parte mais pequena}} \Longleftrightarrow \dfrac{\ell}{x}$ e portanto, pelo que vimos no ponto anterior:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339...$$

O número Φ chama-se o **número de ouro**.

Como vimos, $x^2+\ell x-\ell^2=0$. Dividindo ambos os membros por $x^2, (x \neq 0)$, vemos que Φ é a solução positiva da equação em $X^2 - X - 1 = 0$. A outra solução é $\Psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\Phi}$.

Concluindo, Φ satisfaz a igualdade $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, logo, $\Phi^2 = \Phi + 1$ igualdade que desempenha um papel importante em muitas aplicações.

Como construir geometricamente o número de ouro?

Começamos com um triângulo ABC, retângulo em A, com catetos de comprimento 1 e 1/2.

- com centro em C traçamos uma circunferência de raio 1/2, para determinar o ponto X no cateto BC.
- com centro em B traçamos uma circunferência de raio BX, para determinar o ponto D no cateto AB.

D divide o cateto AB na proporção de ouro. De facto, pelo teorema de Pitágoras, $BC = \sqrt{5}/2$ e daí que $BX = DB = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Portanto $1/DB = \Phi$.

Note que $DB = \frac{1}{\Phi}$ e, portanto, $AD = 1 - \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\Phi^2}$.