

Número de ouro

João Nuno Tavares, Ângela Geraldo

CMUP/ Universidade do Porto

jntavar@fc.up.pt

CITAÇÃO

Tavares, J. N., Geraldo, A. (2019)

Número de ouro,

Rev. Ciência Elem., V7(01):008

doi.org/10.24927/rce2019.008

EDITOR

José Ferreira Gomes,

Universidade do Porto

EDITOR CONVIDADO

Paulo Ribeiro-Claro,

Universidade de Aveiro

RECEBIDO EM

08 de dezembro de 2012

ACEITE EM

05 de fevereiro de 2019

PUBLICADO EM

12 de março de 2019

COPYRIGHT

© Casa das Ciências 2019.

Este artigo é de acesso livre, distribuído sob licença Creative Commons com a designação [CC-BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/), que permite a utilização e a partilha para fins não comerciais, desde que citado o autor e a fonte original do artigo.

rce.casadasciencias.org



A **secção de ouro** ou **razão de ouro** é uma proporção que surge em várias situações geométricas e aritméticas. A mais simples é a seguinte (Euclides): consideremos um segmento de comprimento ℓ e dividamo-lo em duas partes desiguais - uma maior e outra mais pequena. Esta divisão diz-se que está na razão de ouro (ou na **proporção divina**) quando:

$$\frac{\text{segmento total}}{\text{parte maior}} = \frac{\text{parte maior}}{\text{parte mais pequena}}$$

Se x representa o comprimento da parte maior, a que é igual x ?

De acordo com a proporção divina, temos que:

$$\frac{\text{segmento total}}{\text{parte maior}} = \frac{\text{parte maior}}{\text{parte mais pequena}} \iff \frac{\ell}{x} = \frac{x}{\ell - x}$$

e, portanto, x é solução da equação do 2º grau:

$$x^2 + \ell x - \ell^2 = 0$$

As soluções são, aplicando a fórmula resolvente:

$$x = \frac{\ell, \pm \sqrt{\ell^2 + 4\ell^2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \ell$$

Sendo x um comprimento só nos interessa a solução positiva que é:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \ell$$

Número de ouro

Se Φ representa o valor comum das duas frações que surgem na proporção divina, qual o valor de Φ ?

Por definição $\Phi = \frac{\text{segmento total}}{\text{parte maior}} = \frac{\text{parte maior}}{\text{parte mais pequena}} \iff \frac{\ell}{x}$ e portanto, pelo que vimos no ponto anterior:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339\dots$$

O número Φ chama-se o **número de ouro**.

Como vimos, $x^2 + \ell x - \ell^2 = 0$. Dividindo ambos os membros por x^2 , ($x \neq 0$), vemos que Φ é a solução positiva da equação em $X^2 - X - 1 = 0$. A outra solução é $\Psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\Phi}$.

Concluindo, Φ satisfaz a igualdade $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, logo, $\Phi^2 = \Phi + 1$ igualdade que desempenha um papel importante em muitas aplicações.

Como construir geometricamente o número de ouro?

Começamos com um triângulo ABC , retângulo em A , com catetos de comprimento 1 e $1/2$.

- com centro em C traçamos uma circunferência de raio $1/2$, para determinar o ponto X no cateto BC .
- com centro em B traçamos uma circunferência de raio BX , para determinar o ponto D no cateto AB .

D divide o cateto AB na proporção de ouro. De facto, pelo teorema de Pitágoras, $BC = \sqrt{5}/2$ e daí que $BX = DB = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Portanto $1/DB = \Phi$.

Note que $DB = \frac{1}{\Phi}$ e, portanto, $AD = 1 - \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\Phi^2}$.