REVISTA DE CIÊNCIA ELEMENTAR

Produto escalar

João Nuno Tavares, Ângela Geraldo
CMUP/ Universidade do Porto
jntavar@fc.up.pt

CITAÇÃO
Tavares, J., Geraldo, A. (2019)
Produto escalar,
Rev. Ciência Elem., V7(02):039
doi.org/10.24927/rce2019.039

EDITOR
José Ferreira Gomes,
Universidade do Porto

EDITOR CONVIDADO
Paulo Fonseca,
Universidade de Lisboa

RECEBIDO EM
22 de novembro de 2018

ACEITE EM
29 de maio de 2019

PUBLICADO EM
21 de junho de 2019

rce.casadasciencias.org

O produto escalar (euclidiano) de dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ em $\mathbb{R}^2$ define-se por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Da mesma forma se define o produto escalar de dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ em $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$, e considerando os dois vetores não nulos, deduzimos que $\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \leq 1$, isto é, $-1 \leq \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \leq 1$.

Portanto existe um único valor $\theta \in [0, \pi]$ tal que $\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$, já que a função cosseno restrita ao intervalo $[0,\pi]$ é uma função bijetiva sobre o intervalo $[-1,1]$. A este valor θ chama-se o ângulo convexo entre dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Considerando $\theta = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \in [0, \pi]$, esse ângulo define-se então através de:

$$\cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

Daqui resulta outra expressão que nos permite determinar o produto escalar entre dois vetores,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u} \wedge \vec{v})$$

Atenção: Do produto escalar entre dois vetores resulta um número real e não um vetor.

A norma de um vetor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ é dada por $\|\vec{u}\| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2}$, u_1 e u_2 coordenadas de $\vec{u}$. Já a norma de um vetor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ é dada por $\|\vec{u}\| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2}$.

Propriedades

Vamos agora ver algumas das propriedades do produto escalar entre dois vetores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos:

1. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores colineares podemos ter dois casos:
   - $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm o mesmo sentido então $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|. \|\vec{v}\|$ pois $\vec{u}$ e $\vec{v}$ colineares

com o mesmo sentido
$$\Rightarrow \ \vec{u} \wedge \vec{v} = 0^{\circ} \ \Rightarrow \ \cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) = 1 \ \Rightarrow \ \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|.$$

- $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm sentido contrário então $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\|.\ \|\vec{v}\|$ pois $\vec{u}$ e $\vec{v}$ colineares com o sentidos contrários
$$\Rightarrow \ \vec{u} \wedge \vec{v} = 180^{\circ} \ \Rightarrow \ \cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) = -1 \ \Rightarrow \ \vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|.$$

2. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ o que se deduz diretamente da propriedade anterior considerando $\vec{u}$ e $\vec{u}$ dois vetores colineares com o mesmo sentido.
3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$
   Neste caso temos de mostrar cada uma das implicações anteriores.
   $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \ \Rightarrow \ \cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$ mas $\cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$ e $0 \leq \vec{u} \wedge \vec{v} \leq 180^{\circ} \ \Rightarrow \ \vec{u} \wedge \vec{v} = 90^{\circ}$ ou seja, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares.
   Acabamos então de provar que se o produto escalar entre dois vetores for igual a zero então esses vetores são perpendiculares.
   Já se $\vec{u} \perp \vec{v} \ \Rightarrow \ \vec{u} \wedge \vec{v} = 90^{\circ} \ \Rightarrow \ (\cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0 \ \Rightarrow \ \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
   Provamos então que se dois vetores são perpendiculares então o produto escalar entre esses dois vetores é igual a zero.
   Provadas as duas implicações provamos que $\vec{u} \cdot \vec{v} \iff \vec{u} \perp \vec{v}$
4. Se $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ então o ângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é um ângulo obtuso, ou seja, $90^{\circ} < \vec{u} \wedge \vec{v} < 180^{\circ}$.
   Para provar esta propriedade basta verificar que se $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ então $\cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) < 0$ o que implica que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é um ângulo obtuso (de amplitude superior a 90° e inferior a 180°).
5. Se $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ então o ângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é ângulo agudo, ou seja, $0^{\circ} < \vec{u} \wedge \vec{v} < 90^{\circ}$.
   Verifica-se que se $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ então $\cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) > 0$ o que implica que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é um ângulo agudo (de amplitude superior a 0° e inferior a 90°).
6. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
7. $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$, para todo o $k \in \mathbb{R}$.
8. Propriedade distributiva do produto escalar em relação à adição de vetores, $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
9. Desigualdade de Cauchy-Schwarz: $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$.