REVISTA DE CIÊNCIA ELEMENTAR

Regressão linear simples

Maria Eugénia Graça Martins
Universidade de Lisboa

CITAÇÃO
Graça Martins, M. E. (2019) Regressão linear simples, *Rev. Ciência Elem.*, V7(03):045.
doi.org/10.24927/rce2019.045

EDITOR
José Ferreira Gomes, Universidade do Porto

RECEBIDO EM
16 de fevereiro de 2019

ACEITE EM
23 de março de 2019

PUBLICADO EM
16 de outubro de 2019

rce.casadasciencias.org

Um modelo de Regressão é um modelo matemático que descreve a relação entre duas ou mais variáveis de tipo quantitativo. Se o estudo incidir unicamente sobre duas variáveis e o modelo matemático for a equação de uma reta, então designa-se por regressão linear simples.

Quando o diagrama de dispersão sugere a existência de uma associação linear entre duas variáveis x e y, é possível resumir através de uma reta a forma como a variável dependente ou *variável resposta* (ou *variável a prever*) y é influenciada pela variável independente ou *variável explanatória* (ou *variável preditora*) x. A esta reta dá-se o nome de **reta de regressão**.

Dado um conjunto de dados bivariados (x_i, y_i), $i = 1,...,n$, do par de variáveis (x, y), pode ter interesse ajustar uma reta da forma $y = a + bx$, que dê informação sobre como se refletem em y as mudanças processadas em x. Um dos métodos mais conhecidos de ajustar uma reta a um conjunto de dados é o *método dos mínimos quadrados* (FIGURA 1), que consiste em determinar a reta que minimiza a soma dos quadrados dos desvios (ou erros) entre os verdadeiros valores das ordenadas e os obtidos a partir da reta que se pretende ajustar

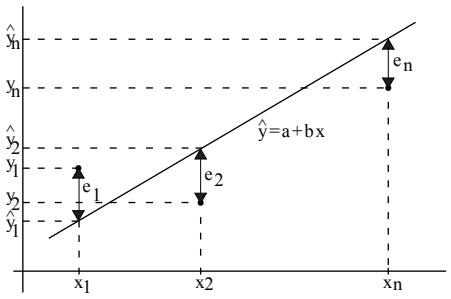


FIGURA 1. No método dos mínimos quadrados, minimiza-se a soma dos quadrados dos erros assinalados aqui pela distância segundo y entre o valor da ordenada do ponto dado e o obtido a partir da reta de regressão.

Esta técnica, embora muito simples, é pouco resistente, já que é muito sensível a dados "estranhos" - valores que se afastam da estrutura da maioria, normalmente designados por *outliers*. Efetivamente, quando se pretende minimizar

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

pode-se mostrar que os estimadores do declive e da ordenada da origem da reta de regressão são, respetivamente:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{e} \quad a = \bar{y} - b\bar{x}$$

onde se representa por $\bar{x}$ e $\bar{y}$ as médias dos x_i's e dos y_i's. O facto de dependerem da média, que é uma medida não resistente, faz com que a recta de regressão seja também não resistente. Assim, é necessário proceder a uma análise prévia do diagrama de dispersão para ver se não existem alguns *outliers*. À reta de regressão obtida por este processo também se dá o nome de **reta dos mínimos quadrados**.

Pode-se mostrar que $r^2 = 1 - \frac{\sum_{i=0}^{n} (y_i - \widehat{y_i})^2}{\sum_{i=0}^{n} (y_i - \bar{y}_i)^2}$ onde r é o coeficiente de correlação amostral entre x e y.

Esta quantidade r^2 é o **coeficiente de determinação** e é referida como a quantidade de variabilidade dos dados explicada pelo modelo de regressão. Esta medida é normalmente utilizada como uma indicação da adequação do modelo de regressão ao conjunto de pontos inicialmente dado [2], mas deve ser usada com precaução, pois nem sempre um valor de r^2 grande (próximo de 1) é sinal de que um modelo esteja a ajustar bem os dados. Do mesmo modo, um valor baixo de r^2, pode ser provocado por um *outlier*, enquanto a maior parte dos dados se ajustam razoavelmente bem a uma reta [1]. Uma visualização prévia dos dados num diagrama de dispersão é fundamental.

Uma forma de verificar se o modelo ajustado é bom é através dos resíduos, isto é, das diferenças entre os valores observados y e os valores ajustados $\hat{y}$:

resíduos = dados observados – valores ajustados

pois se estes não se apresentarem muito grandes, nem com nenhum padrão bem determinado, é sintoma de que o modelo que estamos a ajustar é bom.

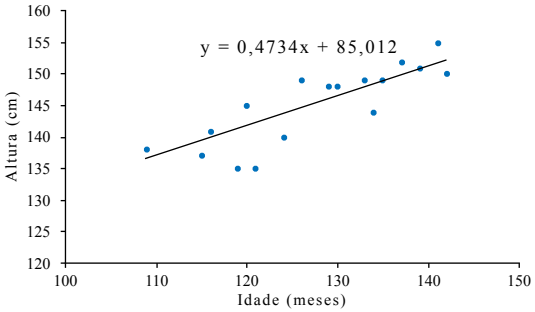
Nota

A reta de regressão é utilizada em predições, isto é, para predizer o valor de y, para um dado valor de x. No entanto estas predições não devem contemplar valores de x fora do intervalo dos x_i's, uma vez que o facto de a reta se ajustar bem aos pontos dados não significa que sirva para fazer *extrapolações*.

Suponha que se recolheu o seguinte conjunto de dados referentes à idade (em meses) e à altura (em centímetros) de 18 crianças de uma escola:

Criança	Idade (meses)	Altura (cm)
1	109	138
2	113	145
3	115	137
4	116	141
5	119	135
6	120	145
7	121	135
8	124	140
9	126	149
10	129	148
11	130	148
12	133	149
13	134	144
14	135	149
15	137	152
16	139	151
17	141	155
18	142	150

O diagrama de dispersão dos dados sugere a existência de uma relação linear entre a idade e a altura, pelo que se vai ajustar aos dados uma reta dos mínimos quadrados, cuja equação está no gráfico seguinte (obtida no Excel):



O coeficiente de correlação é igual a 0,793, donde o coeficiente de determinação vem aproximadamente igual a 63% (≈100 x $0{,}793^2$)%, o que significa que a variabilidade que não é explicada pela reta de regressão anda à volta de 37% (= 100 - 63)%.

Se se tentar extrapolar a altura de um jovem com cerca de 17 anos (200 meses) obter-se-á uma altura de 180 cm e para um jovem adulto de cerca de 21 anos mais de 2 metros de altura, o que ilustra o problema referido na nota anterior.

REFERÊNCIAS

[1] DE VEAUX, R. D. *et al., Intro stats.* Pearson Education Inc. ISBN 0-201-70910. 2004.

[2] GRAÇA MARTINS, M. E., *Introdução à Probabilidade e à Estatística. Com complementos de Excel.* Edição da SPE, ISBN-972-8890-03-6. Depósito Legal 228501/05. 2005.

[3] MONTGOMERY, D. C. & RUNGER, G. C., *Applied statistics and probability for engineers,* 6th ed. John Wiley & Sons, Inc. ISBN 0-471-20454-4. 2003.