

Equação do 2º grau

João Nuno Tavares, Ângela Geraldo
CMUP/ Universidade do Porto

CITAÇÃO

Tavares, J. N., Geraldo, A. (2020)
Equação do 2º grau,
Rev. Ciência Elem., V8(01):003.
doi.org/10.24927/rce2020.003

EDITOR

José Ferreira Gomes,
Universidade do Porto

RECEBIDO EM

07 de janeiro de 2020

ACEITE EM

07 de janeiro de 2020

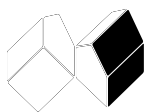
PUBLICADO EM

28 de fevereiro de 2020

COPYRIGHT

© Casa das Ciências 2020.
Este artigo é de acesso livre,
distribuído sob licença Creative
Commons com a designação
[CC-BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/), que permite
a utilização e a partilha para fins
não comerciais, desde que citado
o autor e a fonte original do artigo.

rce.casadasciencias.org



Uma equação do 2º grau (ou equação quadrática) é qualquer equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$ onde x representa a incógnita e a , b e c representam números conhecidos, com $a \neq 0$.

Equações do 2º grau incompletas

Uma equação do 2º grau (ou equação quadrática) incompleta é uma equação do tipo $ax^2 + c = 0$ ou $ax^2 + bx = 0$, onde a , b e c são números reais ou complexos com $a > 0$. Para resolver uma equação incompleta do tipo $ax^2 + bx = 0$ usamos as operações usuais de resolução de equações do 1º grau. Logo,

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{-c}{a}} \vee x = \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

- Se $c = 0$ a equação tem apenas uma solução $x = 0$;
- Se $c < 0$ as soluções da equação são números reais $x = -\sqrt{\frac{|c|}{a}} \vee x = \sqrt{\frac{|c|}{a}}$;
- Finalmente se $c > 0$, a equação $ax^2 + c = 0$, tem duas soluções

$$x = -i\sqrt{\frac{|c|}{a}} \vee x = i\sqrt{\frac{|c|}{a}}$$

Já para resolver uma equação quadrática do tipo $ax^2 + bx = 0$, comecemos por notar que $ax^2 + bx$ pode ser escrito como um produto de fatores (observemos que a incógnita x é comum aos dois termos e por isso podemos colocar x em evidência). Assim, usando o produto de fatores e a lei do anulamento do produto podemos resolver a equação da seguinte forma:

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee ax + b = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-b}{a}$$

Equações do 2º grau completas

Uma equação do 2º grau completa é do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ onde a , b e c são números reais ou complexos com $a \neq 0$. Para resolver esta equação podemos "completar o quadrado", fazendo o seguinte

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde se deduz finalmente a famosa fórmula resolvente

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Se o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ for igual a zero, a equação tem uma única raiz dupla igual a $x = \frac{-b}{2a}$;
- Se $\Delta > 0$ a equação tem duas raízes reais distintas x_1 e x_2 tais que $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- Já se $\Delta < 0$ a equação não tem soluções reais mas tem duas raízes complexas x_1 e x_2 tais que $x_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Resolução geométrica de al-Khwarizmi

Abu Abdullah Mohammed ben Musa AL-Khwarizmi (Khwarizm, Uzbequistão ? 780 – Bagdá ? 850) foi um matemático árabe, também astrónomo, geógrafo e historiador. É de seu nome que deriva o termo “algarismo”, em português. Foi um dos primeiros matemáticos a trabalhar na Casa da Sabedoria, em Bagdad, durante o reinado do califa al-Mamum (813-833).

Para ilustrar a resolução de uma equação de 2º grau proposta por al-Khwarizmi, vamos utilizar a equação $x^2 + 10x = 39$.

A resolução é puramente geométrica. O quadrado x^2 e o produto $10x$ são representados literalmente por um quadrado de lado x e por dois retângulos de lados 5 e x , respetivamente, como se ilustra na FIGURA 1.

O quadrado extra de área 25 “completa o quadrado” de lado $5+x$, sendo a área total desse quadrado igual a $25+39=64$, uma vez que $x^2 + 10x = 39$. Portanto,

$$\text{área do quadrado grande} = (x + 5)^2 = 64 \Rightarrow x + 5 = 8 \Rightarrow x = 3.$$

Al-Khwarizmi não admitia comprimentos negativos e, por isso, não considera a solução $x = -13$ da equação $x^2 + 10x = 39$.

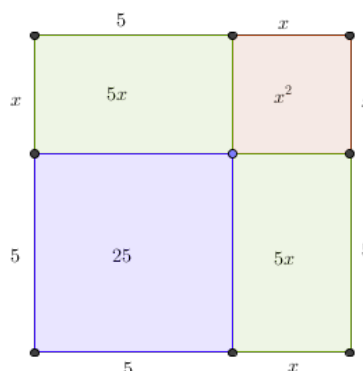


FIGURA 1. Resolução de uma equação de 2º grau proposta por al-Khwarizmi.

Um problema muito antigo

Os problemas que conduzem à resolução de uma equação do segundo grau estão entre os mais antigos da Matemática. Em textos cuneiformes escritos pelos babilónicos há 4 mil anos, encontramos, por exemplo, o problema de encontrar dois números conhecendo a sua soma s e seu produto p .

Em termos geométricos, se os dois números s e p forem estritamente positivos, este problema consiste em determinar os comprimentos dos lados de um retângulo, conhecendo o semi-perímetro s e a sua área p .

Os números procurados são as raízes da equação de 2º grau $x^2 - sx + p = 0$.

De facto, se um dos números é x , o outro número será $s - x$, o seu produto é $p = x(s - x) = sx - x^2$ e portanto $x^2 - sx + p = 0$.

Exemplo

Consideramos então o problema de encontrar dois números cuja soma é igual a 8, ou seja $s = 8$, e cujo produto é igual a -65 , ou seja $p = -65$. Os números procurados serão então as soluções da equação quadrática $x^2 - 8x - 65 = 0$.

Pela fórmula resolvente temos então que:

$$\begin{aligned}x &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 1 \times (-65)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{324}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{8 + 18}{2} \vee x = \frac{8 - 18}{2} \Leftrightarrow x = 13 \vee x = -5\end{aligned}$$

Os números procurados são então o número 13 e o número -5 . Podemos verificar que $s = 13 + (-5) = 8$ e que $p = 13 \times (-5) = -65$.