REVISTA DE CIÊNCIA ELEMENTAR

Equação do 2º grau

João Nuno Tavares, Ângela Geraldo
CMUP/ Universidade do Porto

CITAÇÃO
Tavares, J. N., Geraldo, A.(2020)
Equação do 2º grau,
Rev. Ciência Elem., V8(01):003.
doi.org/10.24927/rce2020.003

EDITOR
José Ferreira Gomes,
Universidade do Porto

RECEBIDO EM
07 de janeiro de 2020

ACEITE EM
07 de janeiro de 2020

PUBLICADO EM
28 de fevereiro de 2020

rce.casadasciencias.org

Uma equação do 2º grau (ou equação quadrática) é qualquer equação da forma $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ onde $\boldsymbol{x}$ representa a incógnita e $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ representam números conhecidos, com $a \neq 0$.

Equações do 2º grau incompletas

Uma equação do 2º grau (ou equação quadrática) incompleta é uma equação do tipo $ax^2+c=0$ ou $ax^2+bx=0$, onde a, b e c são números reais ou complexos com $a>0$. Para resolver uma equação incompleta do tipo $ax^2+bx=0$ usamos as operações usuais de resolução de equações do 1º grau. Logo,

$$ax^2+c=0 \Leftrightarrow ax^2=-c \Leftrightarrow x^2=\frac{-c}{a} \Leftrightarrow x=-\sqrt{\frac{-c}{a}} \vee x=\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

- Se $c=0$ a equação tem apenas uma solução $x=0$;
- Se $c<0$ as soluções da equação são números reais $x=-\sqrt{\frac{|c|}{a}} \vee x=\sqrt{\frac{|c|}{a}}$;
- Finalmente se $c>0$, a equação $ax^2+c=0$, tem duas soluções $x=-i\sqrt{\frac{|c|}{a}} \vee x=i\sqrt{\frac{|c|}{a}}$

Já para resolver uma equação quadrática do tipo $ax^2+bx=0$, comecemos por notar que ax^2+bx pode ser escrito como um produto de fatores (observemos que a incógnita x é comum aos dois termos e por isso podemos colocar x em evidência). Assim, usando o produto de fatores e a lei do anulamento do produto podemos resolver a equação da seguinte forma:

$$ax^2+bx=0 \Leftrightarrow x(ax+b)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee ax+b=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{-b}{a}$$

Equações do 2º grau completas

Uma equação do 2º grau completa é do tipo $ax^2+bx+c=0$ onde a, b e c são números reais ou complexos com $a \neq 0$. Para resolver esta equação podemos "completar o quadrado", fazendo o seguinte

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c=0 &\Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \\
&\Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0 \\
&\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0 \\
&\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde se deduz finalmente a famosa fórmula resolvente

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Se o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ for igual a zero, a equação tem uma única raiz dupla igual a $x = \frac{-b}{2a}$;
- Se $\Delta > 0$ a equação tem duas raízes reais distintas x_1 e x_2 tais que $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- Já se $\Delta < 0$ a equação não tem soluções reais mas tem duas raízes complexas x_1 e x_2 tais que $x_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Resolução geométrica de al-Khwarizmi

Abu Abdullah Mohammed ben Musa Al-Khwarizmi (Khwarizm, Uzbequistão ? 780 – Bagdá ? 850) foi um matemático árabe, também astrónomo, geógrafo e historiador. É de seu nome que deriva o termo "algarismo", em português. Foi um dos primeiros matemáticos a trabalhar na Casa da Sabedoria, em Baghdad, durante o reinado do califa al-Mamum (813-833).

Para ilustrar a resolução de uma equação de 2º grau proposta por al-Khwarizmi, vamos utilizar a equação $x^2 + 10x = 39$.

A resolução é puramente geométrica. O quadrado x^2 e o produto $10x$ são representados literalmente por um quadrado de lado x e por dois retângulos de lados 5 e x, respetivamente, como se ilustra na FIGURA 1.

O quadrado extra de área 25 "completa o quadrado" de lado 5+x, sendo a área total desse quadrado igual a 25+39=64, uma vez que $x^2 + 10x = 39$. Portanto,

$$\text{área do quadrado grande} = (x+5)^2 = 64 \Rightarrow x + 5 = 8 \Rightarrow x = 3.$$

Al-Khwarizmi não admitia comprimentos negativos e, por isso, não considera a solução $x = -13$ da equação $x^2 + 10x = 39$.

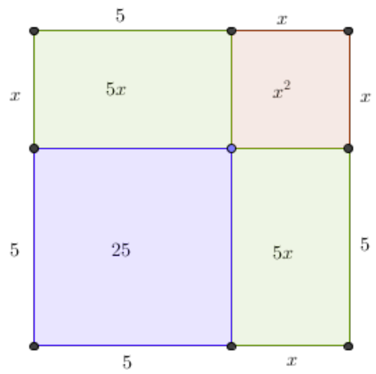

FIGURA 1. Resolução de uma equação de 2º grau proposta por al-Khwarizmi.

Um problema muito antigo

Os problemas que conduzem à resolução de uma equação do segundo grau estão entre os mais antigos da Matemática. Em textos cuneiformes escritos pelos babilónicos há 4 mil anos, encontrámos, por exemplo, o problema de encontrar dois números conhecendo a sua soma s e seu produto p.

Em termos geométricos, se os dois números s e p forem estritamente positivos, este problema consiste em determinar os comprimentos dos lados de um retângulo, conhecendo o semi-perímetro s e a sua área p.

Os números procurados são as raízes da equação de 2º grau $x^2 - sx + p = 0$.

De facto, se um dos números é x, o outro número será $s - x$, o seu produto é $p = x(s-x) = sx - x^2$ e portanto $x^2 - sx + p = 0$.

Exemplo

Consideramos então o problema de encontrar dois números cuja soma é igual a 8, ou seja $s = 8$, e cujo produto é igual a -65, ou seja $p = -65$. Os números procurados serão então as soluções da equação quadrática $x^2 - 8x - 65 = 0$.

Pela fórmula resolvente temos então que:

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 1 \times (-65)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{324}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{8+18}{2} \vee x = \frac{8-18}{2} \Leftrightarrow x = 13 \vee x = -5$$

Os números procurados são então o número 13 e o número -5. Podemos verificar que $s = 13 + (-5) = 8$ e que $p = 13 \times (-5) = -65$.