# A caixa de Bertrand

Carla Santos*, Cristina Dias ǀ
* Instituto Politécnico de Beja
ǀ Instituto Politécnico de Portalegre

**CITAÇÃO**
Santos, C., Dias, C.(2020)
A caixa de Bertrand,
*Rev. Ciência Elem.*, V8(04):055.
doi.org/10.24927/rce2020.055

**EDITOR**
José Ferreira Gomes,
Universidade do Porto

**EDITOR CONVIDADO**
João Lopes dos Santos
Universidade do Porto

**RECEBIDO EM**
14 de fevereiro de 2020

**ACEITE EM**
08 de setembro de 2020

**PUBLICADO EM**
15 de dezembro de 2020



**A resolução de problemas que envolvem o cálculo de probabilidades condicionadas, em situações em que a redução do espaço amostral passa despercebida, conduzem, frequentemente, a soluções equivocadas, fruto da reduzida intuição probabilística do ser humano. A "Caixa de Bertrand" é um dos mais famosos problemas em que se manifesta o conflito entre intuição e probabilidades.**

No ensino das probabilidades, o conceito de probabilidade condicionada é introduzido, frequentemente, associado às técnicas formais de contagem, em experiências que consistem em "extrações sem reposição". Nestas experiências, a noção de probabilidade condicionada e de redução do espaço amostral são bem explícitas, pelo que a resolução de problemas que envolvam situações deste tipo não se reveste de qualquer complexidade. Existem, no entanto, muitos problemas de probabilidades condicionadas em que, sendo mais difícil a visualização da situação, a redução do espaço amostral passa despercebida abrindo caminho para que a reduzida intuição probabilística do ser humano entre em conflito com a noção de probabilidade. Para ilustrar a manifestação deste tipo de equívoco destaca-se muitas vezes um episódio que envolve D'Alembert (1717–1783), um dos mais notáveis intelectuais do séc. XVIII, em que este apresentou uma solução errada a um problema, envolvendo o lançamento de uma moeda duas vezes e em que era questionado "qual a probabilidade de se obter pelo menos uma cara?". O raciocínio apresentado por D'Alembert assumia que, ao lançar uma moeda duas vezes, há 3 resultados possíveis (duas caras, duas coroas ou uma cara e uma coroa), o que conduziu à resposta errada de $\frac{2}{3}$. Na realidade, os resultados possíveis nesta experiência são 4 (cara-cara, coroa-coroa, cara-coroa e coroa-cara) e, portanto, a resposta correta é $\frac{3}{4}$.

Na literatura são inúmeras as referências a equívocos, no cálculo de probabilidades, relacionados com a deficiente intuição probabilística do ser humano e a sua manifestação nas mais diversas situações. Um problema clássico, em que são frequentes respostas que violam as regras das probabilidades, é o famoso problema da "Caixa de Bertrand", que foi enunciado, pela primeira vez, pelo matemático francês Joseph Bertrand, na sua obra *Calcul des probabilités*, de 1889.

**Problema da "Caixa de Bertrand"**

Existem três caixas idênticas, fechadas. Sabe-se que uma das caixas contém duas moedas de ouro, outra duas de prata e a terceira uma de prata e uma de ouro. Após a escolha aleatória de uma das caixas, é extraída uma moeda que se verifica ser de ouro. Desconhecendo-se qual era o conteúdo inicial da caixa, pretende-se saber qual a probabilidade de a outra moeda, dessa mesma caixa, ser também de ouro.

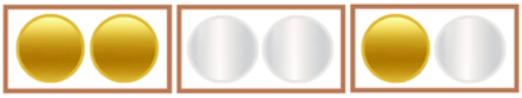

FIGURA 1. Conteúdo das caixas do Problema da “Caixa de Bertrand”.

A resposta ½ é a que se obtém, mais frequentemente, ao problema da “Caixa de Bertrand” e é equivocada. O equívoco, tal como destacou o próprio Bertrand, está em assumir que a probabilidade de a moeda que ficou na caixa, ser de ouro é igual à probabilidade de ser de prata. Essa conclusão equivocada tem por base uma primeira conclusão correta, de que, se a moeda extraída era de ouro, a caixa escolhida terá sido ou a que tem duas moedas de ouro ou a que tem uma moeda de ouro e outra de prata. Mas, como veremos mais em pormenor a seguir, o facto de ter saído uma moeda de ouro atribui diferentes probabilidades de escolha a cada uma destas duas caixas.

Na FIGURA 2, representámos as três caixas, designando-as A, B e C, e respetivos conteúdos, numerando as moedas de ouro, de 1 a 3, por uma questão de facilidade de identificação.

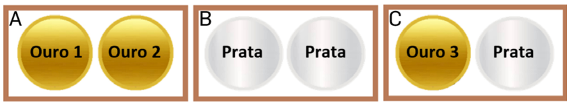


FIGURA 2. Conteúdo das caixas A, B e C.

O enunciado do problema informa que a moeda extraída é de ouro, donde concluímos que a caixa donde saiu essa moeda não poderá ser a que contém apenas moedas de prata. Concretizando, na ilustração deste problema, este facto corresponde à impossibilidade de ter sido escolhida a caixa B.

Para a caixa A (e de forma semelhante para a caixa C), consideremos a experiência aleatória que consiste em extrair duas moedas consecutivamente da caixa.

- No caso da caixa A, o espaço amostral da experiência é o conjunto $\Omega = [(Ouro1, Ouro2), (Ouro2, Ouro1)]$, onde $(Ouro1, Ouro2)$ representa o acontecimento em que a moeda retirada na 1ª extração foi a moeda $Ouro1$ , tendo ficado na caixa a moeda $Ouro2$.
- No caso da caixa C o espaço amostral da experiência é o conjunto $\Omega = [(Ouro3, Prata), (Prata, Ouro3)]$.

Como sabemos que a (primeira) moeda extraída foi de ouro, o acontecimento $(Prata, Ouro3)$ não está nas condições do problema, restando-nos três acontecimentos $(Ouro1, Ouro2)$, $(Ouro2, Ouro1)$ e $(Ouro3, Prata)$. Como, destes acontecimentos, apenas o primeiro e o segundo cumprem o que é pretendido - existir outra moeda de ouro na caixa de onde se retirou a primeira moeda de ouro, a probabilidade solicitada é de ⅔.

Perante a elevada frequência com que ocorre o equívoco descrito, o problema da Caixa de Bertrand deu origem a diversas variantes, entre as quais está o jogo de apostas “Três cartas no chapéu”, popularizado por Martin Gardner, que tem como base uma carta com duas faces pretas, uma carta com duas faces vermelhas e uma carta com uma face preta e outra vermelha e o jogo das portas, conhecido como problema de Monty Hall, apresentado no concurso televisivo "1,2,3" em Portugal, e noutros concursos semelhantes, um pouco por todo o mundo.

## REFERÊNCIAS

[1] BARRIO-GUTIÉRREZ, J., *La teoría de las probabilidades y la realidad*, *REDINET*. 1984.
[2] CLARK, M., *Paradoxes from A to Z*, 3rd. ed. Routledge. 2012.
[3] GARDNER, M. Ah, *Apanhei-te!*, Gradiva. 1993.
[4] TARR, J. & LANNIN, J., *How can teachers build notions of conditional probability and independence?*. In: Jones G.A. (eds) Exploring Probability in School. Mathematics Education Library, Springer, Boston, MA, 40, 215-238. 2005.