REVISTA DE CIÊNCIA ELEMENTAR

A fórmula de Planck

Eduardo Lage
Universidade do Porto

CITAÇÃO
Lage, E.(2020)
A fórmula de Planck,
Rev. Ciência Elem., V8(04):057.
doi.org/10.24927/rce2020.057

EDITOR
José Ferreira Gomes,
Universidade do Porto

EDITOR CONVIDADO
João Lopes dos Santos
Universidade do Porto

RECEBIDO EM
10 de fevereiro de 2020

ACEITE EM
11 de abril de 2020

PUBLICADO EM
15 de dezembro de 2020

rce.casadasciencias.org

O estudo da radiação térmica foi iniciado por Kirchhoff (1860) que introduziu dois conceitos fundamentais: a intensidade espectral – a energia transportada, em cada segundo, por radiação com uma dada frequência ν em equilíbrio térmico com matéria à temperatura absoluta T - que provou só depender da frequência e da temperatura, $I_\nu(T)$, e a noção de corpo negro, um corpo ideal que absorve toda a radiação que nele incida. A determinação desta intensidade $I_\nu(T)$ foi um problema central da Física, teórica e experimental, durante toda a segunda metade do séc. XIX. Boltzmann (1884) mostrou que a intensidade total da radiação emitida por um corpo negro é proporcional a T^4, e Wien (1893) reduziu a intensidade espectral à forma $I_\nu(T) = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)$. Todas as tentativas para encontrar esta função universal f, dentro das teorias clássicas, mostrar-se-iam não só infrutíferas como conduziam a resultados em desacordo com dados experimentais e absurdos tais como a catástrofe ultravioleta. A resolução definitiva destes problemas seria encontrada por Planck (1900) com a introdução de conceitos sem qualquer cabimento em teorias clássicas, inaugurando, dessa forma, a moderna teoria quântica.

A teoria da radiação térmica tinha aberto, em 1900, uma profunda crise na Física Clássica. Havia, por um lado, resultados que se deveriam considerar exactos como a lei de Wien para a intensidade espectral da radiação emitida por um corpo negro, à temperatura absoluta T:

$$I_\nu = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) \tag{1}$$

A intensidade espectral é a energia transportada, em cada segundo, pelas ondas eletromagnéticas, de frequência ν, que constituem a radiação e, na eq. (1), a função $f(x)$ era desconhecida. Não obstante, esta expressão para a intensidade espectral reproduzia a lei de Stefan-Boltzmann: a intensidade total radiada por um corpo negro é proporcional T^4, um resultado verificado experimentalmente numa ampla gama de temperaturas. E também originava a lei de deslocamento de Wien: o máximo da intensidade radiada ocorre para uma frequência proporcional à temperatura absoluta. A referida crise situava-se na determinação da função $f(x)$ quando se usavam modelos realistas, embora simplificados, para o átomo considerado como um oscilador harmónico capaz de emitir e absorver radiação. Relembremos dois importantes resultados obtidos para a densidade espectral de energia, *i.e.*, a energia eletromagnética, por unidade de volume, associada com as ondas de frequência ν:

$$u_\nu(T) = \frac{4\pi}{c} I_\nu(T) = \frac{4\pi}{c} \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) \tag{2}$$

1º: A fórmula de Wien que parecia ajustar-se bem aos resultados experimentais para "altas" frequências:

$$u_\nu(T) \propto \nu^3 e^{-\frac{b\nu}{T}}$$

onde b é uma constante ajustável.

2º: A relação de Planck entre a densidade espectral e a energia média $\langle E \rangle$, de um oscilador harmónico que troca energia com o campo de radiação:

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \langle E \rangle. \tag{3}$$

Este último resultado origina a fórmula de Rayleigh-Jeans e a consequente catástrofe ultravioleta se usarmos $\langle E \rangle = k_B T$ como determinado pela Física Estatística Clássica: a radiação seria tanto mais intensa quanto maior a sua frequência sem limite superior!

Em Outubro 1900, Planck toma conhecimento dos resultados de dois grupos experimentais, em Berlim, que parecem indicar que a expressão de Wien se aproxima da previsão de Rayleigh-Jeans para "baixas" frequências. Perante estes dois limites, Planck encontra uma fórmula de interpolação que se ajusta com perfeição a todos os resultados experimentais,

$$u_\nu(T) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}, \tag{4}$$

surgindo, aqui, h como uma verdadeira constante, embora de valor desconhecido, mas que serve para definir o que são "altas" temperaturas ou "baixas" frequências, antes referidas: $\frac{h\nu}{k_B T} \ll 1$. Mas qual o significado físico desta fórmula que tão bem se ajusta aos dados experimentais? Usando a eq. (3), obtemos o valor médio da energia de um oscilador mecânico:

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \tag{5}$$

Suponhamos, agora que temos $N \gg 1$ destes osciladores – a energia média desta coleção é:

$$U = N \langle E \rangle = \frac{N h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

Os osciladores trocam energia através da radiação – mas o acoplamento é feito através da carga do eletrão, quantidade suficientemente pequena para a podermos ignorar (ela não aparece na fórmula anterior) e, assim, podemos considerar o sistema de osciladores como estando praticamente isolado, com aquela energia U. Qual a entropia desta coleção de osciladores? Sabemos que $\frac{\partial S}{\partial U}=\frac{1}{T}$; assim, eliminando T através da expressão da energia U e integrando, obtemos:

$$S\left(U,N\right)=k_B\left[\left(N+\frac{U}{h\nu}\right)\log\left(N+\frac{U}{h\nu}\right)-\frac{U}{h\nu}\log\left(\frac{U}{h\nu}\right)-N\log N\right] \quad (6)$$

[O último termo nesta expressão, embora irrelevante para o que se segue, é metido "à mão" para garantir a extensibilidade da entropia: $S\left(xU,xN\right)=xS\left(U,N\right)$ para qualquer $x>0$]

Passou, então, a ser este o problema de Planck: como obter esta entropia? Para o resolver, Planck vai socorrer-se da interpretação estatística de Boltzmann (que antes não aceitava): a entropia é o logaritmo (multiplicado pela constante de Boltzmann) do número de maneiras de distribuir a energia U pelos N osciladores. E faz duas hipóteses, ambas ao arrepio de qualquer interpretação clássica. Primeiro, admite que a energia U é constituída por um certo número (n) de elementos finitos de energia (ε), todos iguais (pelo que $U=n\varepsilon$), a que Planck deu o nome de elemento de energia (mais tarde, chamou-lhe "quantum" de energia). Isto é, Planck considera a energia disponível como se tivesse uma "estrutura atómica", atribuindo a cada oscilador um certo número destes "átomos de energia" [O leitor não deixará de notar o "desespero" a que Planck chegara – ele tinha sérias reservas à teoria atómica da matéria!]. Segundo, embora os osciladores sejam distinguíveis, estes elementos de energia são indistinguíveis, um conceito totalmente inexistente na Física Clássica. Então, o número de maneiras de distribuir os n elementos de energia pelos N osciladores é:

$$W_N=\frac{(N+n-1)!}{n!\left(N-1\right)!}$$

[Este é o número de maneiras de distribuir n pontos idênticos por N caixas contíguas – cada estado possível é obtido permutando os n pontos e as $N-1$ paredes que dividem, internamente, as caixas, não contando como distintos quer as permutações dos pontos entre si, quer as permutações dessas paredes]. Considere-se, agora, que N e n são números grandes; usando a fórmula de Stirling para calcular o logaritmo de W_N e eliminar n em favor de U, obtém-se:

$$\frac{S}{k_B}=\left(N+\frac{U}{\varepsilon}\right)\log\left(N+\frac{U}{\varepsilon}\right)-\frac{U}{\varepsilon}\log\frac{U}{\varepsilon}-N\log N$$

Comparando com a expressão obtida para a entropia dos osciladores, eq. (6), vemos que deve ser:

$$\varepsilon=h\nu. \quad (7)$$

Quer dizer, cada oscilador só pode ter a energia $0,h\nu,2h\nu,\ldots,nh\nu,\ldots$ - tal é a hipótese de Planck que não encontra qualquer explicação na Física Clássica mas que se ajusta perfeitamente aos resultados experimentais relativos à intensidade espectral de um corpo negro!

A FIGURA 1 compara as expressões para a intensidade espectral obtidas por Wien, Rayleigh-Jeans e Planck. A FIGURA 2 exibe o perfeito ajuste da intensidade espectral de Planck aos resultados experimentais obtidos em 1900. E a FIGURA 3 mostra o perfeito acordo da intensidade da radiação cósmica de fundo com a fórmula de Planck para uma temperatura $T = 2,74\mathrm{K}$.

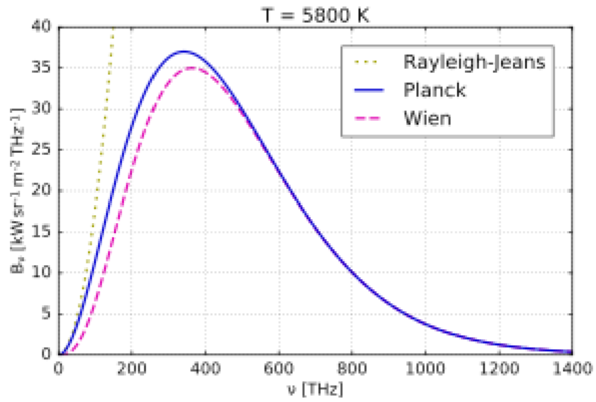

FIGURA 1. Comparação da intensidade espectral para três teorias.

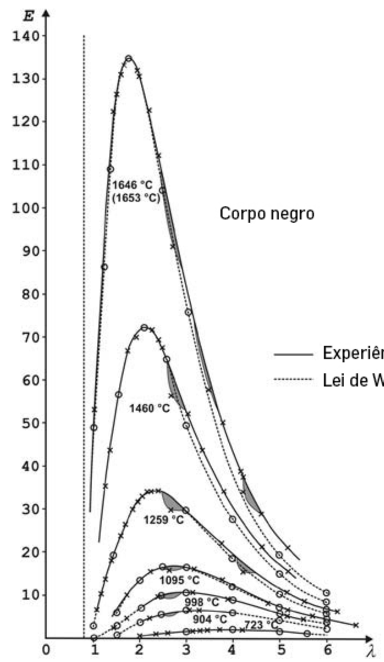

FIGURA 2. O acordo da fórmula de Planck com resultados experimentais para várias temperaturas.

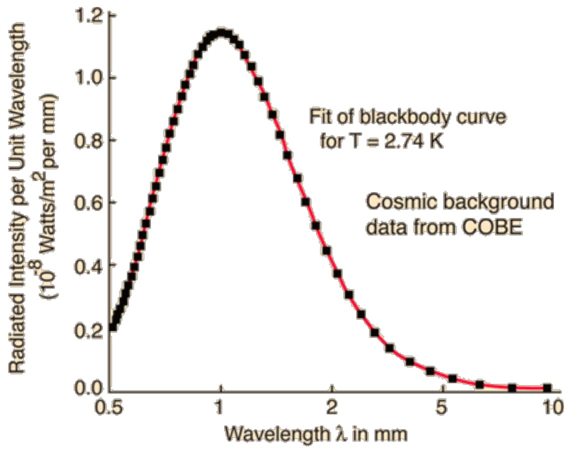

FIGURA 3. Ajuste do espectro da radiação cósmica de fundo à fórmula de Planck para $T = 2,74\mathrm{K}$.

Mas como determinar a constante de Planck? Relembrando a eq. (4), obtemos a forma definitiva da intensidade espectral:

$$I_\nu\left(T\right) = \frac{c}{4\pi} u_\nu\left(T\right) = \frac{2}{c^2}\frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \tag{8}$$

Planck tem a sua disposição dois resultados que lhe permitem calcular as constantes h e k_B, nomeadamente, a constante de Stefan-Boltzmann e a lei de deslocamento de Wien). Obtém

$$h = 6,55 \times 10^{-34} \text{ Js (hoje, aceita-se } 6,63 \times 10^{-34} \text{ Js),}$$

que passou a ser conhecida por constante de Planck; e

$$k = 1,34 \times 10^{-23} \text{ J/K (hoje, aceita-se } 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K).}$$

A partir deste valor da constante de Boltzmann, Planck determina o número de Avogadro e, usando a constante de Faraday ($F = 96,500\ \mathrm{C}$), deduz a carga do eletrão $q_e = -1,56 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$ (hoje, aceita-se $1,60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$). Esta observação é importante: em 1897, apenas 3 anos antes, Thomson encontrara $q_e = -2,16 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$ para a carga do eletrão. Só em 1908, com a determinação, por Rutherford, da carga de uma partícula α se tornou notório como era excelente o resultado de Planck.

Apesar destes excelentes resultados, apresentados em Dezembro de 1900, a hipótese de Planck foi encarada, apenas, como uma habilidade matemática, pouco convincente como teoria física. Teria que se aguardar por 1905, quando Einstein usa a teoria de Planck para conceber o “quantum” de luz, e por 1913, quando Bohr incorpora o quantum no seu modelo atómico. Cada um destes desenvolvimentos merece um tratamento próprio a considerar em futuras publicações.

REFERÊNCIAS

[1] LAGE, E., *A radiação térmica*, *Rev. Ciência Elem.*, V8(2):000. (2020). DOI: 10.24927/rce2020.000.

[2] LAGE, E., *O corpo negro*, *Rev. Ciência Elem.*, V8(2):000. (2020). DOI: 10.24927/rce2020.000.