REVISTA DE CIÊNCIA ELEMENTAR

Máximo divisor comum

João Nuno Tavares, Ângela Geraldo
CMUP/ Universidade do Porto

CITAÇÃO
Tavares, J. N., Geraldo, A.(2021)
Máximo divisor comum,
Rev. Ciência Elem., V9(01):009.
doi.org/10.24927/rce2021.009

EDITOR
José Ferreira Gomes,
Universidade do Porto

EDITOR CONVIDADO
Jorge Manuel Canhoto
Universidade de Coimbra

RECEBIDO EM
16 de julho de 2013

ACEITE EM
20 de janeiro de 2021

PUBLICADO EM
15 de março de 2021

O máximo divisor comum entre dois ou mais números inteiros (um deles necessariamente diferente de zero) é o maior número inteiro positivo que é divisor (divisão com resto zero) desses números. Por exemplo, o maior divisor que é comum a 9 e a 6 é 3, portanto, o máximo divisor comum entre 9 e 6 é o número inteiro 3.

Formalmente, o inteiro positivo d é o máximo divisor comum dos inteiros a e b, não simultaneamente nulos, se as condiçoes seguintes forem satisfeitas:

1. $d|a$ e $d|b$;
2. $\forall x \in \mathbb{Z}, x|a$ e $x|b$ então $x|d$
3. Se $mdc\,(a,b) = 1$, ou seja, os números inteiros a e b não têm nenhum outro divisor comum para além de 1, dizemos que a e b são primos entre si;

Notação

Utilizamos a notação $mdc\,(a,b)$ ou simplesmente (a,b) para designar o máximo divisor comum entre os números inteiros a e b. Retomando o exemplo anterior, escreveríamos que $mdc\,(9,6) = 3$.

Algumas propriedades

- Se d é um número inteiro tal que $d \neq 0$, temos que $mdc\,(da, db) = d\ mdc\,(a,b)$;
- Se $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, temos que $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{mdc\,(a,b)}{d}$;
- Comutatividade: $mdc\,(a,b) = mdc\,(b,a)$;
- Associatividade: $mdc\,(mdc\,(a,b)\,,c) = mdc\,(a, mdc\,(b,c))$;
- O produto do máximo divisor comum de a e b pelo mínimo múltiplo comum desses mesmos números, é igual ao produto entre a e b, ou seja, $mdc\,(a,b) \times mmc\,(a,b) = ab$.

Cálculo do máximo divisor comum

Em seguida mostraremos três processos que nos permitem determinar o mdc de dois ou mais números inteiros. A diferença entre os três algoritmos reside essencialmente na morosidade de cada um deles consoante os números em causa.

Lista dos divisores

Neste processo o que se pretende, inicialmente, é que se escreva a lista ordenada dos divisores de cada um dos números. Em seguida, encontra-se o maior número que aparece em todas as listas ordenadas ou seja, o maior divisor comum a todos os números considerados.

Exemplo

Como determinar o $mdc\,(32,24)$?

Comecemos por criar as listas ordenadas dos divisores de cada um dos números:

$D_{32}=\{1,2,4,\mathbf{8},16\}$

$D_{24}=\{1,2,3,4,6,\mathbf{8},12\}$

Pretendemos encontrar o maior elemento do conjunto $D_{32}\cap D_{24}$.

Portanto, o $mdc\,(32,24)=8$.

Fatorização em números primos

Podemos igualmente utilizar a fatorização em números primos de cada um dos números para determinar o mdc. Para isso, basta escrevermos cada um dos números em questão como produto de números primos. O máximo divisor comum desses números é igual ao produto dos fatores primos comuns, cada um elevado ao menor dos expoentes. Vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo

Como calcular o $mdc\,(52,20,64)$ através da fatorização em números primos?

$52=2\times 2\times 13=2^2\times 13.$

$20=2\times 2\times 13=2^2\times 13.$

$64=2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times =2^6.$

Logo, o $mdc\,(52,20,64)=2\times 2=4$.

Algoritmo de Euclides

O Algoritmo de Euclides permite determinar o $mdc\,(a,b)$, com a e b dois inteiros positivos, realizando sucessivas divisões de forma a encontrar uma sequência estritamente decrescente de inteiros não negativos (restos das divisões). Encontrada a sequência, o $mdc\,(a,b)$ é igual ao resto que antecede o resto nulo, ou seja, ao número da sequência que antecede o zero. Vejamos a aplicação deste algoritmo num exemplo concreto.

Exemplo

Como determinar o $mdc\,(3125,495)$?

$\frac{3125}{495}=6$ com resto $r_1=180$;

$\frac{495}{180}=2$ com resto $r_2=135$;

$\frac{180}{135}=1$ com resto $r_3=45$;

$\frac{135}{45} = 3$ com resto $r_4 = 0$;

Concluímos então que o $mdc\,(3125, 495)$ é igual ao r_3 (3º resto) pois $r_4 = 0$, ou seja, $mdc\,(3125, 495) = 45$.