Função logarítmica

João Nuno Tavares, Ângela Geraldo
CMUP/ Universidade do Porto

CITAÇÃO
Tavares, J. N., Geraldo, A.(2021)
Função logarítmica,
Rev. Ciência Elem., V9(02):029.
doi.org/10.24927/rce2021.029

EDITOR
José Ferreira Gomes,
Universidade do Porto

EDITOR CONVIDADO
Paulo Ribeiro-Claro
Universidade de Aveiro

RECEBIDO EM
30 de maio de 2013

ACEITE EM
05 de abril de 2021

PUBLICADO EM
15 de junho de 2021

Uma função real $L:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, chama-se uma função logarítmica quando tem as seguintes propriedades:

A) L é uma função estritamente crescente, isto é, $x<y\Leftrightarrow L(x)<L(y)$ ou L é uma função estritamente decrescente, isto é, $x<y\Leftrightarrow L(x)>L(y)$;

B) $L(xy)=L(x)+L(y)$ para quaisquer $x,y\in\mathbb{R}^+$.

Para todo $x\in\mathbb{R}^+$, o número $L(x)$ é o logaritmo de x.

Propriedades

As provas de cada uma das propriedades que se seguem, consideram que L é uma função estritamente crescente. Quando L é uma função estritamente decrescente, as provas são análogas.

1) Injetividade: Uma função logarítmica é sempre injetiva, ou seja, números positivos diferentes têm logaritmos diferentes.

Considerando x e y esses números, podemos então ter que $x<y$ ou $x>y$. Se $x<y$ resulta da propriedade A) que $L(x)<L(y)$. Da mesma forma, se $x>y$ então $L(x)>L(y)$. Nos dois casos, considerando $x\neq y$ temos que $L(x)\neq L(y)$.

2) Logaritmo de 1: O logaritmo de 1 é zero, pois da propriedade B) resulta que,

$$L(1)=L(1\times 1)=L(1)+L(1) \text{ logo } L(1)=0.$$

3) Os números maiores do que 1 têm logaritmos positivos e os números positivos menores do que 1 têm logaritmos negativos.

Sendo L uma função crescente, consideremos $0<x<1<y$. Temos então que $L(x)<L(1)<L(y)$, isto é, $L(x)<0<L(y)$.

4) Para todo $x>0$ tem-se $L(1/x)=-L(x)$.

Considerando x e $1/x$ temos que, $x\cdot(1/x)=1$, donde pelas propriedades B) e 3), temos $L(x)+L(1/x)=L(1)=0$. Portanto, concluímos que $L(1/x)=-L(x)$.

5) Para quaisquer $x,y\in\mathbb{R}^+$ tem-se $L(x/y)=L(x)-L(y)$.

Esta propriedade decorre imediatamente da propriedade anterior, pois

$$L(x/y)=L(x\cdot(1/y))=L(x)+L(1/y)=L(x)-L(y).$$

6) Para todo $x\in\mathbb{R}^+$ e para todo o número racional $r=p/q$ tem-se $L(x^r)=\ r\cdot L(x)$.

Comecemos por notar que a propriedade A) se estende a um produto de um qualquer número de fatores: $L(x_1 \times ... \times x_n) = L(x_1) + L(x_2) + ... + L(x_n)$.

Em particular, se $n \in \mathbb{N}$ temos que:

$$L(x^n) = L(x \times ... \times x) = L(x) + L(x) + ... + L(x) = n \cdot L(x).$$

e fica assim a propriedade provada para r número natural.

Para $r = 0$ está provado, uma vez que, $x^0 = 1$, logo $L\left(x^0\right) = L(1) = 0 = 0 \cdot L(x)$.

Considerando r um número inteiro negativo, $r = -n$ com $n \in \mathbb{N}$, temos pelas propriedades das potências que $x^n \cdot x^{-n} = 1$. Logo, $L(x^n) \cdot L\left(x^{-n}\right) = L(1) = 0$, concluímos então que $L\left(x^{-n}\right) = -L(x^n) = -n \cdot L(x)$.

Finalmente, para r um número racional, $r = p/q$ temos que $(x^r)^q = \left(x^{p/q}\right)^q = x^p$. Pelo provado anteriormente sabemos então que

$$q \cdot L(x^r) = L((x^r)^q) = L(x^p) = p \cdot L(x).$$

Concluímos então que $q \cdot L(x^r) = p \cdot L(x)$ donde resulta que $L(x^r) = (p/q) \cdot L(x)$, ou seja, $L(x^r) = r \cdot L(x)$.

Inversa da função logarítmica

Recordemos que a inversa da função exponencial de base a é a função $log_a x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, que associa a cada número real positivo $x > 0$ o número real $log_a x$, chamado logaritmo de x na base a. Por definição de função inversa temos então que:

$$a^{log_a x} = x \text{ e } log_a(a^x) = x$$

Portanto, $log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x:

$$y = log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

Em seguida, vamos provar que para toda a função logarítmica L, com as propriedades anteriormente definidas, existe $a > 0$ tal que $L(x) = log_a x$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Suponhamos que L é uma função estritamente crescente (o caso em que é estritamente decrescente é tratado igualmente).

Vamos admitir para já que $L(a) = 1$ para um certo $a \in \mathbb{R}^+$, que é único. Veremos depois que esta hipótese não é restritiva.

Como L é uma função estritamente crescente, e $L(1) = 0 < 1 = L(a)$, deduzimos que $a > 1$. Para todo $m \in \mathbb{N}$ temos que:

$$L(a^m) = L(a \times a \times ... \times a) = L(a) + L(a) + ... + L(a) = 1 + 1 + ... + 1 = m.$$

$0 = L(1) = L\left(a^m \cdot a^{-m}\right) = L(a^m) + L\left(a^{-m}\right)$ donde concluímos que $L\left(a^{-m}\right) = -m$. Se $r = m/n$ com $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$ então $rn = m$, e portanto, $m = L(a^m) = L((a^r)^n) = n \cdot L(a^r)$ donde concluímos que $L(a^r) = \dfrac{m}{n} = r$.

Finalmente se x for um número irracional, então, tomando r e s dois números racionais arbitrários tais que $r < x < s$, temos que, uma vez que $a > 1$, $r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s \Rightarrow L(a^r) < L(a^x) < L(a^s) \Rightarrow r < L(a^x) < s$.

Como r e s são arbitrários, segue-se por enquadramento de limites e por unicidade do limite, que $L(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Portanto, $L(y) = log_a y$ para todo $y > 0$.

Vejamos agora que a hipótese anteriormente assumida de que $L(a) = 1$, para um certo $L(a) = 1$, que é único, não é restritiva.

Consideremos então o caso geral, em que temos uma função estritamente crescente $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Então $L(xy) = L(x) + L(y)$, e como $1 < 2$ devemos ter que $0 = L(1) < L(2) = b$, isto é, $b > 0$. Seja $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma nova função, definida por $M(x) = L(x)/b$.

Esta função é também estritamente crescente, transforma somas em produtos e cumpre $M(2) = 1$. Logo, pela primeira parte da demonstração, tem-se $M(x) = log_2 x$ para todo $x > 0$. Portanto, para todo $x > 0$ temos, $x = 2^{M(x)} = 2^{L(x)/b} = \left(2^{1/b}\right)^{L(x)} = a^{L(x)}$, onde $a = 2^{1/b}$.

Tomando $log_a x$ de ambos os membros da igualdade anterior, $x = a^{L(x)}$, vem finalmente $log_a x = L(x)$.

Base da função logarítmica

Na secção anterior provamos que uma qualquer função logarítmica, $L(x)$, é sempre igual ao logaritmo de x numa base a, onde $L(a) = 1$.

Mudança de base

Consideremos L_a e L_b duas funções logarítmicas com bases a e b, respetivamente. A fórmula que nos permite efetuar a mudança de base é a seguinte:

$$L_a(x) = L_a(b) \cdot L_b(x).$$

Por exemplo, tomando a qualquer e $b = 2$, e fazendo $t = L_a(x)$ e $\nu = L_2(x)$, então $a^t = x$ e $2^\nu = x$. Se escrevermos $c = L_a(2)$ sabemos que é equivalente a $a^c = 2$, logo, $x = a^t = 2^\nu = (a^c)^\nu = a^{c\nu}$ portanto $t = c\nu$, isto é, $L_a(x) = L_a(2) \cdot L_2(x)$ para todo $x > 0$.

Aplicando o mesmo raciocínio, podemos concluir que a igualdade:

$L_a(x) = L_a(b) \cdot L_b(x)$ é válida em geral.

REFERÊNCIAS

[1] LIMA *et al.*, *A Matemática do Ensino Médio - Volume 1*, *2ªedição, Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática*. 1997.

[2] LIMA *et al.*, *Logaritmos*, *Instituto de Matemática Pura*, VITAE Apoio à cultura, educação e promoção social. 1991.