REVISTA DE CIÊNCIA ELEMENTAR

Referenciais uniformes equiangulares

Nuno Sá
Universidade dos Açores

CITAÇÃO
Sá, N.(2021)
Referenciais uniformes equiangulares,
Rev. Ciência Elem., V9(02):047.
doi.org/10.24927/rce2021.047

EDITOR
José Ferreira Gomes,
Universidade do Porto

EDITOR CONVIDADO
Paulo Ribeiro-Claro
Universidade do Porto

RECEBIDO EM
23 de fevereiro de 2021

ACEITE EM
19 de março de 2021

PUBLICADO EM
15 de junho de 2021

Um conjunto de linhas diz-se equiangular se os ângulos internos entre qualquer par de linhas for o mesmo. E diz-se uniforme se se espalhar pelo espaço da maneira mais uniforme possível (num sentido descrito mais precisamente no texto). Os versores dum conjunto de linhas uniforme e equiangular constituem uma base para um referencial uniforme equiangular, sendo os referenciais cartesianos um caso particular deste tipo de referencial que ocorre em todas as dimensões, mas podendo haver outros, o que depende crucialmente da dimensão do espaço. O problema de classificar todos os referenciais uniformes equiangulares para dimensões arbitrárias é um problema em aberto na Matemática.

Referenciais uniformes

Um referencial uniforme normalizado para um espaço vetorial d-dimensional é um conjunto de $n \geq d$ vetores unitários $\vec{u}_i$ para o qual qualquer vetor desse espaço admite a decomposição

$$\vec{v} = \frac{d}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{u}_i \text{ sendo } c_i = \vec{\mu}_i \cdot \vec{v} \qquad (1)$$

Quando $n = d$ o referencial uniforme é uma base ortonormada. Quando $n > d$ a redundância da informação contida num maior número de componentes c_i do que a dimensão do espaço encontra aplicações teóricas na Teoria da Informação e práticas nas Telecomunicações.

Um referencial uniforme pode ser representado na forma duma matriz u cujas componentes μ_{ki} são a k-ésima coordenada do vetor $\vec{u}_i$

$$u = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{d1} & \mu_{d2} & \dots & \mu_{dn} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Pode-se mostrar[1] que a condição (1) é equivalente a

$$u \cdot u^T = \frac{n}{d} I_d \,. \qquad (3)$$

Retas equiangulares

Um conjunto de retas equiangulares pode ser descrito por n vetores unitários $\vec{u}_i$ para os quais o produto interno entre qualquer par deles seja o mesmo:

$$\left(u \cdot u^T\right)_{ij} = \vec{\mu}_i \cdot \vec{\mu}_j = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ \pm p & \text{se} \quad i \neq j \end{cases} \tag{4}$$

Os dois sinais possíveis para o produto interno refletem a arbitrariedade na escolha do sentido do vetor que representa cada reta. O ângulo comum feito entre todos os pares de retas é $\theta = \cos^{-1} p$.

A existência de retas equiangulares é um problema antigo, dependente da dimensão d do espaço e do número n de retas. Pode não ter solução ou ter uma ou mais soluções, cada uma para um diferente valor do "ângulo" p, mas tem que ser $n \leq d\,(d+1)\,/2$. Este valor máximo de n só é possível para certas dimensões[2]. Alguns conjuntos concretos de linhas equiangulares em diversas dimensões podem ser encontrados em[3].

Quando os vetores dum referencial uniforme representam retas equiangulares, eles podem então ser descritos por matrizes retangulares $n \times d$ que obedeçam às equações (3) e (4) para $u \cdot u^T$ e para $u^T \cdot u$. Pode-se mostrar[1, 4] que, quando a solução existe, o ângulo p entre as linhas é dado por

$$p^2 = \frac{n-d}{d\,(n-1)} \tag{5}$$

e que tem que ser

$$d \leq n \leq \frac{d\,(d+1)}{2}. \tag{6}$$

Exemplos

Na `FIGURA 1` apresentamos três casos para ilustrar o conceito de referencial uniforme equiangular. Temos:

Esquerda $u = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $u \cdot u^T = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ e $u^T \cdot u = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix}$

Meio $u = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{v}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $u \cdot u^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e

$$u^T \cdot u = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix};$$

Direita $u = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$, $u \cdot u^T = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ e $u^T \cdot u = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$.

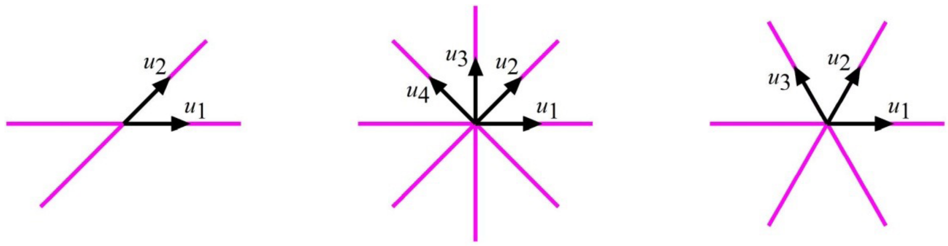

FIGURA 1. O sistema de eixos da esquerda é equiangular, pois só tem duas retas, mas não é uniforme - falha a equação (3). O do meio é uniforme mas não é equiangular, pois cada reta faz ângulos de 45° ou de 90° com as outras - falha a equação (4). O da direita é um referencial uniforme equiangular.

Soluções

Não dispomos de um método sistemático para encontrar referenciais uniformes equiangulares para todas as dimensões. Sabemos que existem as seguintes soluções triviais:

- Para $d = 1$ qualquer valor de n fornece uma solução com $p = 1$.
- Quando $n = d$ os referenciais ortonormados são soluções com $p = 0$.
- Quando $n = d + 1$ há sempre solução com $p = 1/d$.

Fora destes casos, sabemos que, para que haja solução (mas sem a garantir), é necessário que se verifiquem as seguintes condições[4]:

- Se $n = 2d$

$$n = a^2 + b^2 + 1 \text{ com } a, b \in \mathbb{N} \qquad (7)$$

- Caso contrário

$$\sqrt{\frac{d\,(n-1)}{n-d}} \text{ e } \sqrt{\frac{(n-d)\,(n-1)}{d}} \text{ são inteiros ímpares.} \qquad (8)$$

Para as dimensões mais baixas conhecem-se todas as soluções. Em duas dimensões só há as duas soluções triviais: os dois eixos cartesianos e os três eixos do exemplo da direita na FIGURA 1. Em três dimensões há as três soluções representadas na FIGURA 2, uma delas não sendo trivial. Na TABELA 1 indicamos os valores de n e de p para as soluções não triviais existentes até à dimensão $d = 11$. Tabelas mais extensas podem ser encontradas em[4].

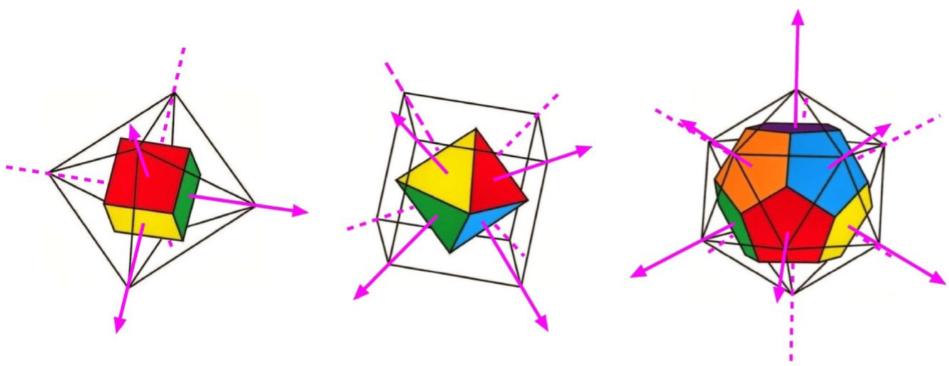

FIGURA 2. Em 3 dimensões há três soluções: $n = d = 3$ eixos ortogonais fazendo ângulos de 90° (trivial), $n = d + 1 = 4$ eixos fazendo ângulos de $\cos^{-1}(1/3) = 70,53$ ° (trivial) e $n = 2d = 6$ eixos fazendo ângulos de $\cos^{-1}\left(1/\sqrt{5}\right) = 63,43$.

Todas elas são facilmente visualizáveis usando os eixos que unem as faces opostas ou os vértices opostos de sólidos platónicos. No primeiro caso as 6 faces dum cubo ou os 6 vértices dum octaedro, no segundo caso as 8 faces dum octaedro ou os 8 vértices dum cubo e no terceiro caso as 12 faces dum dodecaedro ou os 12 vértices dum icosaedro.

TABELA 1. O problema dos referenciais uniformes equiangulares é muito irregular na dimensão: para certas dimensões não há soluções não triviais e para outras há mais do que uma.

$\mathbf{d}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\mathbf{n}\,(\mathbf{1/p})$	...	$6\left(\sqrt{5}\right)$	...	$10\,(3)$	$16\,(3)$	$14\,(\sqrt{13})$ $28\,(3)$	...	$18\left(\sqrt{17}\right)$	$16\,(5)$	...

Espaços complexos

A definição de referencial uniforme equiangular, equações (3) e (4), mantém-se para espaços vetoriais complexos, apenas com a seguinte modificação em (4):

$$|\vec{\mu}_i \cdot \vec{\mu}_j| = p \text{ se } i \neq j. \tag{9}$$

As equações (2) e (5) mantêm-se válidas no caso complexo, mas não (6), que passa a ser[5]:

$$d \leq n \leq d^2. \tag{10}$$

Os referenciais uniformes equiangulares máximos, isto é, para os quais $n = d^2$, desempenham um importante papel na Teoria da Informação Quântica, visto que os espaços vetoriais da Mecânica Quântica são complexos, com possíveis aplicações no domínio da computação quântica.

REFERÊNCIAS

[1] MALOZEMOV, V. & PEVNYI, A., *Equiangular tight frames*, *Pevnyi, Jour. Math. Sci.*, 157, 6, 789. 2009.
[2] LEMMENS, P. & SEIDEL, J., *Equiangular lines*, *Jour. Algebra*, 24, 494. 1973.
[3] TREMAIN, J., *Concrete Constructions of Real Equiangular Line Sets*, *arXiv:0811.2779*. 2008.
[4] SUSTIK, M. *et al.*, *Complex Two-Graphs via Equiangular Tight Frames*, *Lin. Alg. Appl.*, 426, 619. 2007.
[5] RENES, J., J. *Symmetric informationally complete quantum measurements*, *Math Phys.*, 45, 2171. 2004.