Ondas Eletromagnéticas no vácuo

Thales A. Faraco, Aruã M. de Aguiar, Franciele O. Teixeira
UFJF

CITAÇÃO
Faraco, T. A., Aguiar, A. M., Teixeira, F. O.(2021)
Ondas Eletromagnéticas no vácuo,
Rev. Ciência Elem., V9(02):048.
doi.org/10.24927/rce2021.048

EDITOR
José Ferreira Gomes,
Universidade do Porto

EDITOR CONVIDADO
Paulo Ribeiro-Claro
Universidade do Porto

RECEBIDO EM
26 de maio de 2020

ACEITE EM
28 de maio de 2020

PUBLICADO EM
15 de junho de 2021

rce.casadasciencias.org

Durante o século XIX, os fenômenos clássicos relacionados à eletricidade e ao magnetismo foram estudados por vários físicos. Em 1864, James Maxwell estabeleceu conexões entre essas pesquisas anteriores e formulou uma elegante teoria, na qual fenômenos elétricos e magnéticos foram unificados.

Maxwell demonstrou que a força de Lorentz, juntamente com outras quatro equações compõe as relações fundamentais do eletromagnetismo clássico e descrevem todos os fenômenos eletromagnéticos. Essas quatro equações são conhecidas atualmente como Equações de Maxwell e relacionam os vetores campo elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$ entre si e com as suas fontes.

Além disso, Maxwell generalizou a Lei de Ampère e previu a existência de ondas eletromagnéticas, que foram confirmadas experimentalmente anos mais tarde por Hertz (1888).

A Força de Lorentz é expressa pela seguinte relação:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{1}$$

onde q é a carga elétrica e $\vec{v}$ a velocidade dessa carga.

Equações de Maxwell

A seguir, estão representadas as Equações de Maxwell no vácuo em seu formalismo integral, onde q é a carga elétrica, I_c a corrente de condução, ϵ_0 a permissividade elétrica do vácuo e μ_0 a permeabilidade magnética do vácuo.

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad \text{(Lei de Coulomb-Gauss-Maxwell)} \tag{2A}$$

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \qquad \text{(Lei de Gauss-Maxwell)} \tag{2B}$$

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} \qquad \text{(Lei de Faraday-Lenz-Maxwell)} \tag{2C}$$

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_c + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_s \vec{E} \cdot d\vec{S} \qquad \text{(Lei de Ampère-Maxwell)} \qquad (2D)$$

O termo acrescentado por Maxwell à Lei de Ampère, chamado de Corrente de Deslocamento $\left(I_d = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_s \vec{E} \cdot d\vec{S} \right)$, generalizou essa lei, a qual só era válida para processos estacionários.

As Equações de Maxwell também podem ser expressas no formalismo diferencial (utilizando os Teoremas da Divergência e de Stokes), onde ρ é a densidade de carga e $\vec{J}$ a densidade de corrente.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad (3A)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad (3B)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (3C)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (3D)$$

De maneira resumida, pode-se enunciar as Equações de Maxwell da seguinte forma:

- Lei Coulomb-Gauss-Maxwell: Cargas elétricas geram campos elétricos.
- Lei de Gauss-Maxwell: Inexistência de monopolos magnéticos.
- Lei de Faraday-Lenz-Maxwell: Fluxo magnético variável no tempo gera campo elétrico circulante e, por consequência, uma força eletromotriz e uma corrente elétrica induzida. O sentido dessa corrente induzida é tal que se opõe a variação do fluxo que lhe deu origem.
- Lei de Ampère-Maxwell: Corrente elétrica e fluxo elétrico variável no tempo geram campo magnético circulante.

Equação de Onda

Mostra-se, agora, que as Equações de Maxwell levam, inevitavelmente, à existência das ondas eletromagnéticas.

Para começar, supõe-se uma região no vácuo onde as fontes (cargas e correntes) estejam muito distantes, ou seja, $\rho = 0$ e $J = 0$. Assim, as Equações de Maxwell no formato diferencial passam a ser escritas como:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad (4A)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad (4B)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (4C)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (4D)$$

Para desacoplar as Equações de Maxwell, utiliza-se a seguinte identidade do cálculo vetorial para o vetor campo elétrico $\vec{E}$:

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = \nabla \left(\nabla \cdot \vec{E}\right) - \nabla^2 \vec{E}. \tag{5}$$

Então, substituindo as equações 4A e 4C em 5, obtém-se:

$$\nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \nabla\left(0\right) - \nabla^2 \vec{E}$$

$$-\frac{\partial\left(\nabla \times \vec{B}\right)}{\partial t} = -\nabla^2 \vec{E} \tag{6}$$

Substituindo, agora, a equação 4D em 6, tem-se:

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla^2 \vec{E}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{7}$$

De maneira similar, pode-se mostrar que:

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \tag{8}$$

Assim, cada componente dos campos elétrico e magnético satisfaz a equação de onda tridimensional:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{9}$$

Esse resultado levou Maxwell a perceber que a luz era uma onda eletromagnética e também que as ondas eletromagnéticas se propagam no vácuo com a mesma velocidade da luz nesse meio:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c = 3 \times 10^8 m/s \tag{10}$$

Vale salientar que a luz, assim como as demais ondas eletromagnéticas (ondas de rádio, microondas...) possuem as seguintes características em comum:

- São transversais ($\vec{E}$ e $\vec{B}$ são perpendiculares entre si e à direção de propagação da onda);
- A razão entre o módulo de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ é constante $(E = cB)$;
- A onda se desloca no vácuo com velocidade definida e invariável;
- Diferentemente das ondas mecânicas, as ondas eletromagnéticas não necessitam de meio material para se propagarem.

Equação da Continuidade

A Equação da Continuidade é um outro resultado interessante que pode ser obtido a partir das Equações de Maxwell.

Tomando a derivada temporal da equação 3A, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \vec{E}\right) = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{11}$$

Utilizando a seguinte identidade do cálculo vetorial para o vetor campo magnético $\vec{B}$:

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{B}\right) = 0, \tag{12}$$

juntamente com a equação 3D, tem-se:

$$\mu_0 \nabla \cdot \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \vec{E}\right) = 0 \tag{13}$$

Substituindo a equação 11 em 13, obtém-se:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{14}$$

Essa é a Equação da Continuidade e está associada a conservação da carga elétrica.

REFERÊNCIAS

[1] GRIFFITHS, D., *Eletrodinâmica*, *São Paulo: Pearson Education*, 3 ed.. 2010.
[2] HALLIDAY, D. *et al.*, *Fundamentos de Física 3: Eletromagnetismo*, *Rio de Janeiro: Editora LTC*, 10 ed.. 2016.