

Circuitos elétricos

Eduardo Lage
Universidade do Porto

CITAÇÃO

Lage, E. (2021)
Circuitos elétricos,
Rev. Ciência Elem., V9(04):063.
doi.org/10.24927/rce2021.063

EDITOR

João Nuno Tavares
Universidade do Porto

EDITOR CONVIDADO

Maria João Ramos
Universidade do Porto

RECEBIDO EM

20 de dezembro de 2020

ACEITE EM

29 de janeiro de 2021

PUBLICADO EM

15 de dezembro de 2021

COPYRIGHT

© Casa das Ciências 2021.
Este artigo é de acesso livre,
distribuído sob licença Creative
Commons com a designação
[CC-BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/), que permite
a utilização e a partilha para fins
não comerciais, desde que citado
o autor e a fonte original do artigo.

Circuitos elétricos fazem parte da nossa experiência quotidiana, das correntes contínuas geradas por baterias em automóveis ou pilhas em telemóveis, às correntes alternadas que alimentam fogões e frigoríficos ou iluminam as ruas das cidades. Em todos, há dissipações de calor em resistências elétricas, sempre presentes e que se juntam a bobinas e condensadores para completarem os elementos dos circuitos mais simples. As leis de associação destes elementos facilitam a análise de qualquer circuito, ainda mais simplificada pelo conceito de impedância que unifica o estudo de circuitos *cc* e *ac*, ambos sujeitos às leis de Kirchhoff.

Aplicando um campo elétrico a um metal verifica-se o aparecimento de uma corrente elétrica que satisfaz à lei de Ohm (1827):

$$\vec{i} = \sigma \vec{E} \quad (1)$$

Aqui, σ é a condutividade do metal, designando-se por resistividade o seu inverso: $\rho = \frac{1}{\sigma}$ (unidade S.I. ohm*m). A tabela seguinte mostra os valores da resistividade, à temperatura ambiente, para alguns metais. A resistividade aumenta com a temperatura, tipicamente da ordem de 0,5%/ K.

Metal	$\rho (\times 10^{-8} \Omega m)$
Alumínio	2,65
Constantan	47
Cobre	1,7
Prata	1,6
Ouro	2,4
Ferro	10
Níquel	59
Platina	11
Aço	96
Zinco	5,9

rce.casadasciencias.org





FIGURA 1. George Ohm (1789-1854).

A equação (1) exhibe claramente uma quebra de simetria por inversão do tempo¹, uma propriedade característica de um fenómeno irreversível. E, de facto, o trabalho realizado pelo campo elétrico em cada segundo e por unidade de volume, é convertido em calor (calor de Joule):

$$\frac{\delta^2 W}{\delta V \delta t} = \vec{i} \cdot \vec{E} = \rho i^2 \quad (2)$$

A FIGURA 2 mostra uma porção de um condutor cilíndrico (raio a , comprimento l), nas extremidades do qual é aplicada uma diferença de potencial $V_A - V_B$. O cilindro é atravessado por uma corrente, de intensidade I , que se distribui uniformemente na secção transversal e ao longo do eixo.

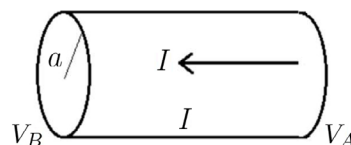


FIGURA 2. Condutor cilíndrico.

Assim, é $i = \frac{I}{\pi a^2}$ e, da equação (1), resulta:

$$V_A - V_B = El = \frac{\rho l}{\pi a^2} I \equiv RI \quad (3)$$

onde:

$$R = \frac{\rho l}{\pi a^2} \quad (4)$$

é a resistência do troço considerado. Esta expressão é generalizável a qualquer outro tipo de secção reta, bastando substituir o denominador pela área dessa secção. Se se considerar um condensador plano cujas armaduras são as bases destes cilindros, a sua capacidade é $C = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{l}$, pelo que $RC = \epsilon_0 \rho$. Ver-se-á que esta relação é mais geral do que aparenta neste exemplo.

A FIGURA 3 representa duas superfícies cilíndricas coaxiais, de comprimento l e raios $a < b$. O meio entre as superfícies é um condutor (ρ). O cilindro interior é mantido ao potencial V_i e o exterior ao potencial $V_e < V_i$, pelo que existe um campo elétrico radial que origina uma corrente também radial, $i_r = \frac{I}{2\pi r l}$. Pela lei de Ohm, é:

$$E_r = \rho i_r = \frac{\rho I}{2\pi r l} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \rightarrow V_i - V_e = \frac{\rho I}{2\pi l} \log\left(\frac{b}{a}\right)$$

Assim, a resistência deste condutor é:

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \log\left(\frac{b}{a}\right) \quad (5)$$

Comparando este resultado com a capacidade de um condensador formado pelas mesmas superfícies cilíndricas, obtém-se $RC = \rho \epsilon_0$, como no exemplo anterior.

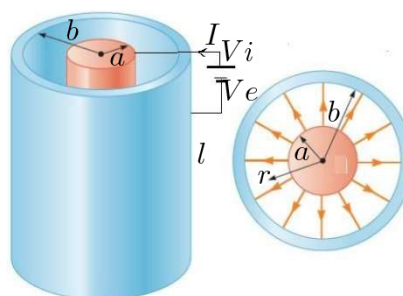


FIGURA 3. Condutor cilíndrico.

A FIGURA 4 mostra duas superfícies esféricas, concêntricas, de raios $R_i < R_e$. O espaço entre as superfícies é inteiramente ocupado por um meio condutor. Estabelecendo uma diferença de potencial V entre as esferas, é criado um campo elétrico radial e, portanto, também uma corrente radial $i_r = \frac{I}{4\pi r^2}$. A lei de Ohm dá:

$$E_r = \rho i_r = \frac{\rho I}{4\pi r^2} \rightarrow V = \frac{\rho I}{4\pi} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e} \right)$$

A resistência deste condutor é:

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e} \right) \quad (6)$$

Comparando com a capacidade de um condensador com a mesma geometria, obtém-se $RC = \rho \epsilon_0$, como antes.

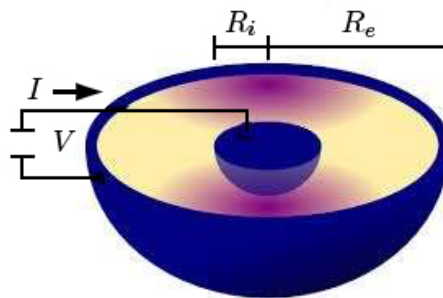


FIGURA 4. Condutor esférico.

Esta relação, verificada nestes três exemplos, entre capacidade de um condensador e a resistência de um condutor com a mesma geometria, não é fortuita. Basta lembrar que, para a mesma diferença de potencial (e, portanto, o mesmo campo elétrico), esta determina a carga do condensador (multiplicando aquela por C) e a corrente no condutor (dividindo aquela por R). A relação é bastante genérica.

Para todos os exemplos anteriores, é fácil mostrar que o calor de Joule libertado em cada segundo, é:

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = RI^2 \quad (7)$$

A FIGURA 5A) exemplifica a associação de resistências em série: a corrente é a mesma para cada resistência, pelo que a diferença de potencial entre os terminais da série é:

$$V = R_1I + R_2I + R_3I + R_4I = (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) I \equiv R_{eq}I$$

onde:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \quad (8)$$

é designada por resistência equivalente, uma resistência que pode substituir o conjunto, gerando a mesma tensão para a mesma corrente e libertando o mesmo calor de Joule que é totalmente libertado nas resistências individuais.

A FIGURA 5B) mostra a associação em paralelo das mesmas resistências. Agora, a tensão é a mesma nos terminais de cada resistência, tendo-se:

$$V_A - V_B = R_1I_1 = R_2I_2 = R_3I_3 = R_4I_4$$

A corrente que atravessa o conjunto é:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = (V_A - V_B) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) = \frac{V_A - V_B}{R_{eq}}$$

onde, agora, é:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \quad (9)$$

com o mesmo significado anterior.

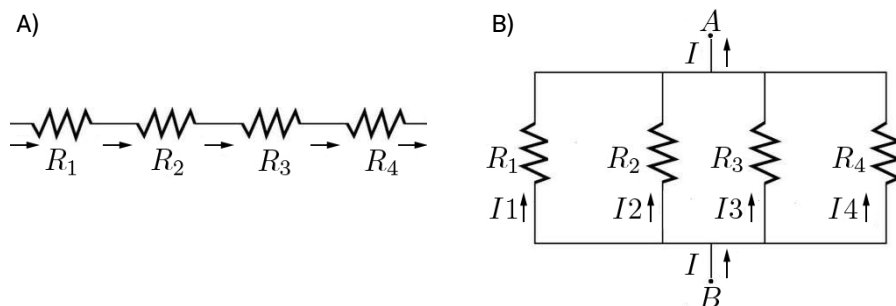


FIGURA 5. A) Associação de resistências em série. B) Associação de resistências em paralelo.

Este conceito de resistência equivalente é muito útil por simplificar a análise de circuitos elétricos.

Um circuito elétrico de corrente contínua (cc) é um conjunto de condutores e uma, pelo menos, força eletromotriz (bateria, pilha). Um nodo é um ponto onde se ligam três ou mais condutores; uma malha é um circuito fechado integrado no circuito elétrico. Há duas maneiras distintas de tratar as correntes. Numa, é atribuída uma corrente a cada ramo (*i.e.*, o condutor que liga dois nodos consecutivos) e escrever que a soma algébrica das correntes é nula em cada nodo (primeira lei de Kirchhoff). Na outra, atribuem-se correntes de malha, reduzindo significativamente o número de incógnitas, ficando automaticamente satisfeita aquela lei. A segunda lei de Kirchhoff, comum aos dois métodos, estabelece que a soma algébrica das quedas de tensão em cada malha iguala a soma algébrica das f.e.m. presentes nessa malha.

A FIGURA 6 representa a ponte de Wheatstone, um dispositivo para medir resistências elétricas. A ponte diz-se em equilíbrio quando não passar corrente através do amperímetro G (de resistência interna r). O circuito é facilmente analisado com as três correntes de malha identificadas na figura:

$$\begin{aligned} V &= R_1(I - I_1) + R_3(I - I_2) \\ 0 &= R_1(I_1 - I) + R_2I_1 + r(I_1 - I_2) \\ 0 &= r(I_2 - I_1) + R_4I_2 + R_3(I_2 - I) \end{aligned}$$

Este sistema é resolvido sem dificuldades; a corrente que passa no galvanómetro é $I_1 - I_2 \propto R_1R_4 - R_2R_3$. Se R_2 for um reóstato, a sua resistência pode ser ajustada até a ponte equilibrar, *i.e.*, $R_1R_4 - R_2R_3 = 0$ o que permite medir, por exemplo, R_4 se as outras resistências forem conhecidas.

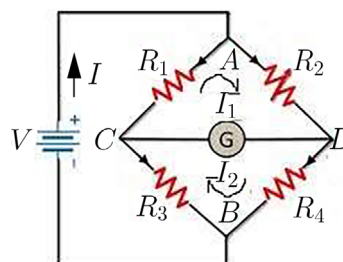


FIGURA 6. A ponte de Wheatstone.

A FIGURA 7 mostra uma ligação de resistências “em cascata” infinita. Contudo, a resistência R_{eq} medida a partir dos terminais AD é finita. Com efeito, a resistência da cascata a jusante de BC é igual à resistência da cascata completa (FIGURA 8). Então:

$$R_{eq} = R + \frac{RR_{eq}}{R + R_{eq}} \rightarrow R_{eq} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}R$$

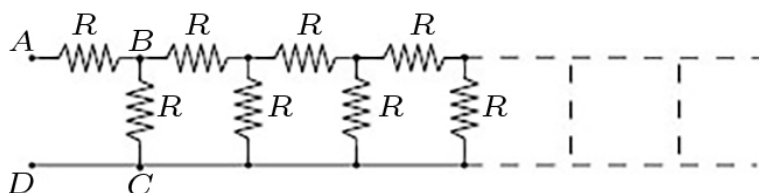


FIGURA 7. Cascata de resistências.

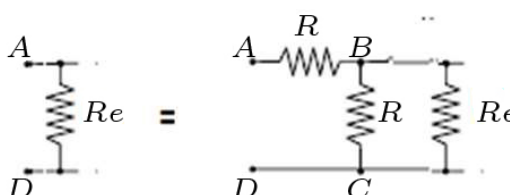


FIGURA 8. Resistência equivalente da cascata.

O aparecimento da razão dourada $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ não é fortuito, como se verá a seguir. A

FIGURA 9 mostra a cascata de resistências, agora finita e fechada por uma resistência R' .

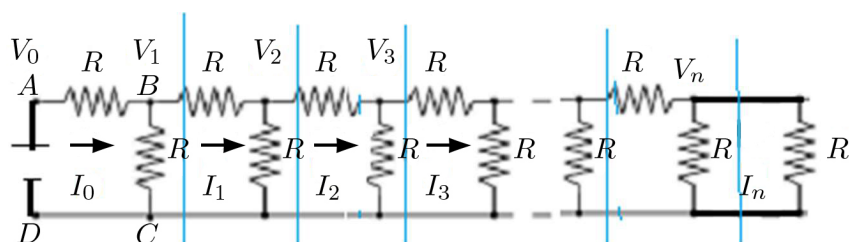


FIGURA 9. Cascata finita exibindo a repetição de quadripólos.

O potencial é nulo em todo o condutor inferior e, no superior, são indicados os potenciais em cada nodo. As linhas azuis mostram que existe um elemento repetitivo designado por quadripolo², que se reproduz na FIGURA 10.

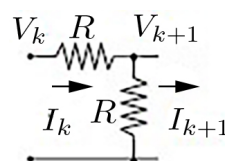


FIGURA 10. Quadripolo.

Um quadripolo relaciona linearmente as variáveis de entrada (tensão e corrente) com as variáveis de saída, definindo, dessa forma, a matriz de transferência:

$$\begin{aligned} V_k &= V_{k+1} + RI_k \\ V_{k+1} &= R(I_k - I_{k+1}) \end{aligned}$$

A matriz de transferência T obtém-se facilmente a partir das relações anteriores:

$$\begin{aligned} V_k &= 2V_{k+1} + RI_{k+1} \\ RI_k &= V_{k+1} + RI_{k+1} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} V_k \\ RI_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{k+1} \\ RI_{k+1} \end{bmatrix} \equiv T \begin{bmatrix} V_{k+1} \\ RI_{k+1} \end{bmatrix}$$

Da FIGURA 9, conclui-se que estas relações são válidas para $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Então:

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ RI_0 \end{bmatrix} = T^n \begin{bmatrix} V_n \\ RI_n \end{bmatrix} = T^n \begin{bmatrix} R' \\ R \end{bmatrix} I_n \quad (10)$$

Aqui, a última igualdade resulta do fecho da cadeia através da resistência R' .

A matriz de transferência é real e simétrica. Logo, diagonalizável. Os seus valores e vectores próprios são ortogonais e normalizados à unidade, ficam:

$$\begin{aligned} t_+ &= 1 + \alpha & v_+ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix} \\ t_- &= 1 - \frac{1}{\alpha} & v_- &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Daqui obtém-se:

$$T^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ t_+^n \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} + t_-^n \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & -1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix} \right\}$$

Substituindo na equação (10), resulta:

$$\frac{V_0}{RI_0} = \frac{\alpha R' + R + \left(\frac{t_-}{t_+}\right)^2 \left(\frac{R'}{\alpha} - R\right)}{R' + \frac{R}{\alpha} + \left(\frac{t_-}{t_+}\right)^n (-R' + \alpha R)}$$

Vê-se agora que a escolha $R' = \alpha R$ anula qualquer dependência no tamanho da cascata e determina $\frac{V_0}{RI_0} = \alpha$, como se tinha encontrado atrás.

Associação de condensadores e de bobinas

A FIGURA 11 mostra dois condensadores ligados em série e que se imagina inseridos num circuito elétrico. Por simples conservação de carga, estão ambos igualmente carregados. Ora:

$$V_A - V_C = V_A - V_S + V_S - V_C = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \equiv \frac{Q}{C_{eq}}$$

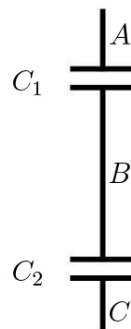


FIGURA 11. Condensadores em série.

A expressão define a capacidade equivalente do conjunto, *i.e.*, a capacidade de um único condensador que apresenta a mesma carga para a mesma diferença de potencial:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (11)$$

Na FIGURA 12, os mesmos condensadores estão ligados em paralelo. Agora, a queda de tensão é a mesma em cada condensador:

$$V_A - V_S = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$

A carga total armazenada no conjunto é

$$Q = Q_1 + Q_2 = (V_A - V_S)(C_1 + C_2) \equiv C_{eq}(V_A - V_S)$$

A capacidade equivalente, com o mesmo significado atrás dado, é a soma das capacidades:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \quad (12)$$

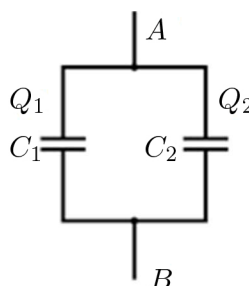


FIGURA 12. Condensadores em paralelo.

Em ambos os casos, a energia eletrostática acumulada no conjunto é igual à acumulada na capacidade equivalente. Note-se que as expressões para a capacidade equivalente apresentam resultados cruzados com os obtidos para a associação de resistências – tal não é de estranhar se se atender ao resultado $RC = \rho\epsilon_0$ antes encontrado em diversos exemplos.

A FIGURA 13 representa uma associação em série de bobinas em repouso. O fluxo magnético através das duas bobinas é³:

$$\Phi = L_1 I + L_2 I + 2M_{12} I$$

Então, a f.e.m. desenvolvida entre os terminais A e B é:

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} = -(L_1 + L_2 + 2M_{12}) \frac{dI}{dt} \equiv -L_{eq} \frac{dI}{dt}$$

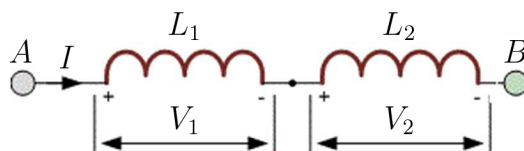


FIGURA 13. Bobinas em série.

O conjunto comporta-se como uma única bobina com o coeficiente de auto-indução equivalente:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M_{12} \quad (13)$$

A FIGURA 14 exibe a associação em paralelo das mesmas bobinas. A f.e.m. desenvolvida entre os terminais A e B é a mesma quer se utilize um ou outro ramo para o seu cálculo:

$$E = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

$$E = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M_{12} \frac{dI_1}{dt}$$

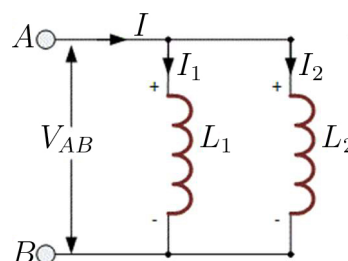


FIGURA 14. Bobinas em paralelo.

Resolvendo em ordem às correntes em cada ramo e notando que a corrente I que entra no circuito é a soma daquelas, tem-se:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} = - \left[\frac{L_1 + L_2 - 2M_{12}}{L_1 L_2 - M_{12}^2} \right] E \equiv - \frac{E}{L_{eq}}$$

do que define a impedância equivalente para esta associação:

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M_{12}^2}{L_1 + L_2 - 2M_{12}} \quad (14)$$

É, pela equação anterior, o coeficiente de auto indução de uma bobina que apresenta nos seus terminais a mesma tensão para a mesma corrente I .

Em ambas associações, a energia acumulada pelas bobinas é a mesma que na "bobina equivalente". Deve-se notar que o coeficiente de indução mútua não é necessariamente o mesmo nos dois casos pois que depende da distância e orientação relativa das duas bobinas.

Se este coeficiente puder ser ignorado, então as regras para a impedância equivalente são as mesmas que para a associação de resistências. É mesmo comum ignorar o coeficiente de indução mútua nestas definições e introduzi-lo como um elemento adicional na análise de circuitos elétricos.

Impedâncias

Resistências, condensadores e bobinas são os elementos principais de circuitos elétricos quando tensões e correntes variam no tempo, como é o caso dos circuitos em corrente alternada (*ac*). Nestes, as f.e.m. e correntes variam sinusoidalmente no tempo o que permite introduzir a representação complexa pois que aqueles elementos originam relações lineares entre tensões e correntes. As leis de Kirchhoff são válidas em cada instante: em particular, para cada malha, a soma das f.e.m. quer externamente aplicadas quer originadas na lei da indução de Faraday, igualam a soma das quedas de tensão ao longo da malha. No que se segue, aceita-se que foi ultrapassado o período transitório após se activar o circuito.

A FIGURA 15 representa um simples circuito com os elementos em série⁴. A fonte externa aplica uma tensão $V_S(t)$, obtendo-se, para a malha:

$$V_S(t) - L \frac{dI}{dt} = \frac{Q}{C} + RI$$

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Aceitando ser $V_S(t) = V_0 \cos(\omega t) = \text{Re}(V_0 e^{i\omega t})$, esta representação complexa pode ser usada para a carga e corrente, sob a condição de, no fim dos cálculos, serem tomadas as respectivas partes reais.

Assim, obtém-se das expressões acima, após eliminar a carga na primeira equação:

$$V_0 = \left(i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + R \right) I \equiv Z(\omega) I$$

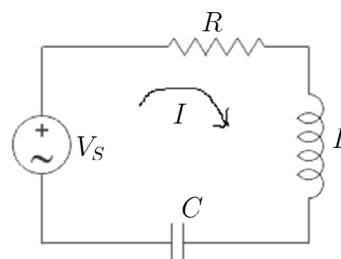


FIGURA 15. Circuito RLC.

Aqui, $Z(\omega)$ é designada por impedância do circuito, um conceito inventado por Steinmetz que, neste caso, se escreve:

$$Z(\omega) = i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + R$$

Ora, observando o circuito, vê-se que resistência, bobina e condensador estão em série (são percorridos pela mesma corrente) e, observando a expressão da impedância vê-se que é a soma de três termos, como aconteceria com resistências em série, o que leva a atribuir as seguintes impedâncias a cada um daqueles elementos:



FIGURA 16. Charles Proteus Steinmetz (1865-1923).

$$\begin{aligned} \text{resistência} &\rightarrow R \\ \text{bobina} &\rightarrow i\omega L \\ \text{condensador} &\rightarrow \frac{1}{i\omega C} \end{aligned}$$

Nestas condições, as associações, atrás consideradas em série ou paralelo de condensadores ou bobinas (ignorando o coeficiente de indução mútua) conduzem a correspondentes leis de associação de impedâncias idênticas às que se obtiveram para resistências e, dessa maneira, a análise de circuitos ac é idêntica à estudada em circuitos cc.

Regressando ao circuito na FIGURA 15, a potência despendida pelo gerador é $P(t) = V_S(t) I(t)$. Ora, $I(t) = \text{Re} \left[\frac{V_0 e^{i\omega t}}{Z(\omega)} \right]$. Defina-se $Z(\omega) = |Z(\omega)| e^{i\alpha(\omega)}$,

o que origina $I(t) = \frac{V_0}{|Z(\omega)|} \cos(\omega t - \alpha(\omega))$. Em geral, define-se a potência fornecida pela média de $P(t)$ sobre um ciclo de vibração:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T dt P(t) = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{V_0^2}{|Z(\omega)|} \cos(\omega t) \cos(\omega t - \alpha(\omega)) = \frac{|V_0|}{2|Z(\omega)|} \cos(\alpha(\omega))$$

Este resultado identifica-se com a expressão seguinte:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V_0 I^*] = \frac{|I|^2}{2} \operatorname{Re} [Z(\omega)] \geq 0 \quad (15)$$

É habitual dar a esta expressão uma forma idêntica à obtida em cc, definindo-se, para isso, a tensão e corrente eficazes, *i.e.*, $V_{ef} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$ e $I_{ef} = \frac{|I|}{\sqrt{2}}$. A habitual tensão doméstica de 230V é uma tensão eficaz, uma observação importante para aferir se um dispositivo elétrico aguenta a tensão máxima (que é, portanto, $\sqrt{2}$ vezes maior).

A ponte de Wheatstone (FIGURA 6), com as resistências nos ramos substituídas por impedâncias, pode ser analisada exatamente como antes, mas nem sempre o equilíbrio é possível. De facto, a condição $Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$ nunca é satisfeita se, por exemplo, $Z_1 = R_1, Z_3 = R_3$ e $Z_2 = R_2, Z_4 = i\omega L$ ou $\frac{1}{i\omega C}$. Mas o equilíbrio já é possível se $Z_2 = i\omega L, Z_3 = \frac{1}{i\omega C}$, vindo $R_1 R_4 = \frac{L}{C}$. É mais utilizada a ponte de Anderson (FIGURA 17) que mede, simultaneamente, uma resistência e uma capacidade ou coeficiente de auto-indução.

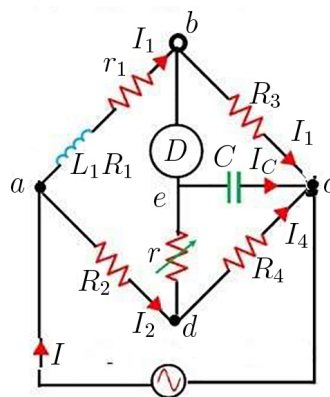


FIGURA 17. Ponte de Anderson.

A ponte fica equilibrada quando o detetor D não acusar passagem de corrente, *i.e.*, $V_b = V_e$. Nestas condições, a corrente em *abc* é I_1 e tem-se $V_c - V_a = I_1 (R_1 + r_1 + \omega L_1 + R_3)$. Esta mesma diferença de potencial vigora

para *adc*, *i.e.*, $V_c - V_a = I_2 \left(R_2 + \frac{R_4 \left(r + \frac{1}{i\omega C} \right)}{R_4 + r + \frac{1}{i\omega C}} \right)$, ficando assim estabelecida

uma primeira relação entre as correntes I_1 e I_2 . Uma segunda relação resulta de $V_b - V_a = V_e - V_a$, *i.e.*, $I_1 (R_1 + r_1 + i\omega L_1) = I_2 R_2 + r I_c$. Ora $I_2 = I_c + I_4$ e $I_c \left(r + \frac{1}{i\omega C} \right) = I_4 R_4$, o que determina, em particular, I_c que, substituída na igual-

dade anterior, estabelece a segunda relação entre I_1 e I_2 . Das duas relações, obtém-se a condição de equilíbrio da ponte que é independente da frequência:

$$R_1 = \frac{R_2 R_3}{R_4} - r_1$$

$$\frac{L_1}{C} = R_3 \left(r + R_2 + \frac{r R_2}{R_4} \right)$$

A primeira equação é a mesma que para uma ponte de Wheatstone, o que não deve admirar porque a esta se reduz a de Anderson para $\omega = 0$. Aquela equação permite medir R_1 se as resistências no segundo membro forem todas conhecidas. A segunda equação determina o coeficiente de auto-indução da bobina ou a capacidade do condensador.

A condição de equilíbrio estabelece uma relação entre impedâncias, desdobrando-se, pois, em duas equações quando se separam, no resultado final, a partes real e imaginária. Ora, a parte imaginária dos elementos na ponte está sempre associada com a frequência, o que justifica a independência na frequência das relações de equilíbrio.

A FIGURA 17 representa uma cascata infinita de impedâncias. A sua análise é idêntica à efetuada com resistências, obtendo-se facilmente a impedância equivalente:

$$Z_{eq} = \frac{1}{2} \left(Z_1 \pm \sqrt{Z_1^2 + 4Z_1 Z_2} \right)$$

Só são aceitáveis soluções com $\text{Re}(Z_{eq}) \geq 0$. Considerando, por exemplo⁴,

$Z_1 = i\omega L$ e $Z_2 = \frac{1}{i\omega C}$, tem-se $Z_{eq} = \frac{1}{2} \left(i\omega L \pm \sqrt{\frac{4L}{C} - \omega^2 L^2} \right)$. Assim, para

$\omega \leq 2\sqrt{\frac{1}{LC}}$ só existe uma raiz e há lugar a dissipação. Esta não existe para frequências superiores àquele limite, funcionando a cascata como um filtro passa-alto. Trocando as impedâncias, resulta

$Z_{eq} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{i\omega C} \pm \sqrt{\frac{4L}{C} - \frac{1}{\omega^2 C^2}} \right)$, havendo dissipação

para $\omega \geq \frac{1}{2\sqrt{LC}}$ altas frequências, *i.e.*, a cascata funciona como um filtro passa-baixo.

Mas como pode uma associação de bobinas e condensadores originar dissipação? A resposta, em ambos os casos, reside no facto de o gerador estar sempre a debitar energia porque esta se propaga ao longo da cadeia infinita.

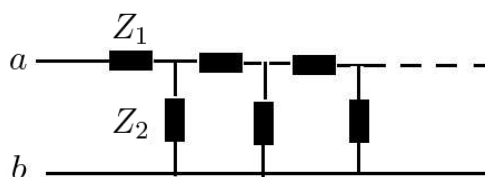


FIGURA 18. Cascata de impedâncias.

Efeito pelicular

Num condutor onde se estabeleça uma corrente alternada, é gerado um campo magnético que actua sobre a corrente empurrando-a para a superfície do condutor. Este efeito pelicular depende da frequência imposta à corrente, designando-se por profundidade pelicular a distância próxima da superfície onde a corrente preferencialmente se situa. Um modelo simples captura a essência do fenómeno. Imagine-se um condutor que preenche totalmente o espaço acima do plano xy . Para uma corrente paralela a este plano, a sua densidade i_x não pode depender de x , pela lei de conservação de carga, nem de y por simetria. Assim considerar-se-á $i_x(z, t)$, o que origina, por sua vez, um potencial vectorial $A_x(z, t)$, satisfazendo¹:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = \mu_0 i_x$$

Aqui, c deve ser interpretado como a velocidade da luz no metal e μ_0 deve, também, corresponder à permeabilidade magnética do condutor, mas estas observações serão ignoradas no que segue. Ora, pela lei de Ohm, é $i_x = \sigma E_x$, onde σ é a condutividade do condutor que, em geral, depende da frequência aplicada mas que aqui, para simplificar, se considerará constante; o campo eléctrico, para além do aplicado pelo gerador, tem a parte induzida pela variação no tempo do campo magnético gerado pela corrente. É este que agora se pretende considerar para o que basta recordar¹ a relação $E_x = -\frac{\partial A_x}{\partial t}$. Assim, a equação anterior fica:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\mu_0 \sigma \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

Para corrente variando sinusoidalmente no tempo, tem-se $A_x(z, t) = e^{i\omega t} f(z)$, obtendo-se:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + k^2 f = 0 \quad (16)$$

com:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0 \sigma \omega$$

Para os metais, o primeiro termo, no segundo membro, só é comparável ao segundo termo para frequências da ordem de 10^{18} Hz. Assim, para frequências inferiores a esta, é: $k \simeq \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu_0 \sigma \omega} \equiv \pm \frac{1-i}{\delta}$, com $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$. Então, a solução da equação (16) que se anula para $z = +\infty$, é:

$$f(z) \propto e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\frac{z}{\delta}\right)$$

A corrente $i_x = -i\omega \sigma e^{i\omega t} f(z)$ decai numa distância da ordem de δ , o comprimento

de penetração pelicular. Para os condutores da tabela acima inserida, é $\delta \sim 1\text{cm}$ para $\omega \sim 100\text{ rad/s}$.

REFERÊNCIAS

- ¹ LAGE, E., *Os fundamentos do eletromagnetismo*, Rev. Ciência Elem., V9(1):016. (2021). DOI: [10.24927/rce2021.016](https://doi.org/10.24927/rce2021.016).
- ² LAGE, E., *Eletrostática*, Rev. Ciência Elem., V9(1):015. (2021). DOI: [10.24927/rce2021.015](https://doi.org/10.24927/rce2021.015).
- ³ LAGE, E., *Forças em campos magnéticos*, Rev. Ciência Elem., V9(1):017. (2021). DOI: [10.24927/rce2021.017](https://doi.org/10.24927/rce2021.017).
- ⁴ LAGE, E., *Vibrações*, Rev. Ciência Elem., V8(1):016. (2020). DOI: [10.24927/rce2020.015](https://doi.org/10.24927/rce2020.015).