

O que é o e para o computador?

CITAÇÃO

Vasconcelos, P. B. (2021)
O que é o e para computador?,
Rev. Ciência Elem., V10(01):005.
doi.org/10.24927/rce2022.005

EDITOR

João Nuno Tavares
Universidade do Porto

RECEBIDO EM

08 de dezembro de 2021

ACEITE EM

09 de dezembro de 2021

PUBLICADO EM

15 de março de 2022

COPYRIGHT

© Casa das Ciências 2022.
Este artigo é de acesso livre,
distribuído sob licença Creative
Commons com a designação
[CC-BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/), que permite
a utilização e a partilha para fins
não comerciais, desde que citado
o autor e a fonte original do artigo.

[rce.casadasciencias.org](https://www.casadasciencias.org)



Paulo Beleza de Vasconcelos

Universidade do Porto

Como é que o computador ou a máquina de calcular nos fornecem o valor de e ? E de $e^{0,1}$? A mesma questão pode ser colocada para o valor de outras funções num ponto: por exemplo, \sin , \cos e \log . Se se pensar que um computador trabalha apenas com as operações elementares “+”, “-”, “ \times ” e “/”, então o cálculo deve passar por exprimir a função exponencial em termos destas operações.

Motivação

Como aproximar $e^{0,1}$?

Considere-se $f(x) = e^x$ uma função infinitamente derivável em 0. Ora, sabe-se que $f(0) = e^0 = 1$. Como a derivada da função exponencial é a própria função exponencial, então $f'(0) = e^0 = 1$. Sabendo a imagem de f e da sua derivada na origem, pode-se construir a reta tangente a f em 0: $y = f(0) + f'(0)x = 1 + x$. Para pontos x próximos da origem, a reta tangente permite-nos obter uma boa aproximação para $f(x)$. Ou seja, $e^{0,1} \approx e^0 + e^0 \times 0,1 = 1,1$. Ora o valor fornecido pelo computador é: 1,105170918075648, pelo que se tem uma casa decimal correta.

Como melhorar? Bem, se no caso anterior se construir a reta tangente, polinómio de grau 1, $P_1(x)$, tal que $f(0) = P_1(0)$ e $f'(0) = P_1'(0)$, então pode-se tentar construir um polinómio de grau 2 na condição de adicionalmente satisfazer $f''(0) = P_2''(0)$. Assim, sendo $P_2(x) = a + bx + cx^2$, tem-se que $P_2(0) = a$, $P_2'(0) = b$ e $P_2''(0) = 2c$. Pelo que $a = e^0 = 1$, $b = e^0 = 1$ e $2c = e^0 = 1$, donde o polinómio de segundo grau que verifica as três condições anteriores é $P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$. Pode-se então aproximar “melhor” $e^{0,1}$ através de $P_2(0,1) = 1 + 0,1 + 0,005 = 1,105$, e passa-se a ter três casas decimais coincidentes.

Este processo pode ser continuado para um polinómio de grau n centrado em 0, $P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$, que se designa por polinómio de Taylor de grau n centrado em 0 (FIGURA 1).

Série de Taylor

Seja $f(x)$ uma função infinitamente derivável. O polinómio de Taylor de grau n centrado em $x_0 \in \mathbb{R}$ vem dado por

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

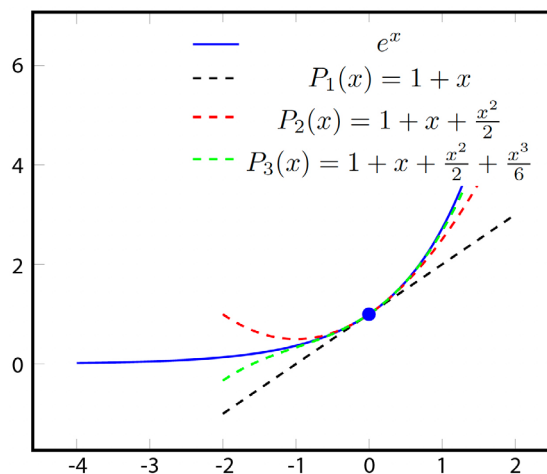


FIGURA 1. A função exponencial e os polinômios de Taylor de grau 1, 2 e 3 centrados em 0 da função exponencial.

sendo $f^{(k)}$ a derivada de ordem k de f . Na verdade, o valor de n pode crescer até ao infinito (e mais além...). Define-se série de Taylor da função f centrada em x_0 e avaliada em x à soma infinita

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Para a função exponencial, tem-se

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{k!} (x - x_0)^k.$$

Quando a série se desenvolve em torno de $x_0 = 0$ é designada por série de Maclaurin. A aproximação pelo polinômio de Taylor resulta então de truncar a série de Taylor num número finito de termos.

Várias questões se podem levantar:

- Para aproximar o valor de uma função num ponto, qual o valor de x_0 a escolher? A função pode estar definida para todo o real, mas apenas na vizinhança de x_0 a aproximação polinomial deve dar bons resultados. Como melhorar a aproximação?
- Que condições devem ser verificadas para que a série seja convergente? Na verdade poderá não haver convergência para um dado valor de x_0 , e polinômios com elevado grau trazem problemas ao cálculo numérico: crescimento rápido de $n!$ (fração a convergir para zero muito rapidamente) e potências muito elevadas de $(x - x_0)^k$.

Para melhorar o cálculo numérico pode-se evitar o cálculo explícito das potências e factorial, basta verificar (método de Horner) que

$$e^x = 1 + x\left(1 + \frac{x}{2}\left(1 + \frac{x}{3}\left(1 + \dots\right.\right.\right.$$

pode ser usado para exprimir a série de Taylor da função exponencial em torno de 0.

Análise do erro

Sendo $P_n(x)$ o polinómio de Taylor de grau n centrado em x_0 , pode-se definir o erro absoluto em aproximar $f(x)$ por $P_n(x)$:

$$R_n(x) = |f(x) - P_n(x)|.$$

No caso da função exponencial

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \left| \frac{e^{(n+1)c}}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \\ &= \left| e^c \frac{e^{(n+1)}}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \end{aligned}$$

sendo c um valor real que satisfaz $x_0 \leq c \leq x$. Ora como a função exponencial é crescente, então atinge o maior valor no extremo direito do intervalo $[x_0, x]$. Então, o erro absoluto é majorado por

$$R_n(x) \leq \left| e^x \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

e o relativo por

$$\frac{R_n(x)}{e^x} \leq \left| \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right|.$$

Note-se que $|P_{n+1}(x) - P_n(x)| = \left| \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right|$, e o erro relativo em $P_n(x)$ é majorado pelo termo de ordem $n+1$ da série de Taylor. Assim, pode-se determinar quantos termos n terão de ser considerados para que uma precisão de tol seja verificada: $\left| \frac{(x-x_0)^n}{n!} \right| \leq \text{tol}$.

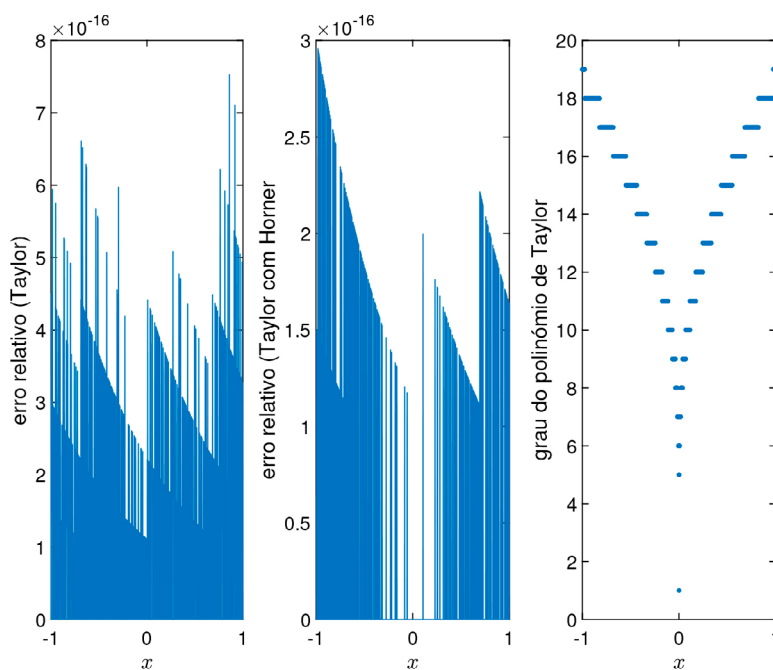


FIGURA 2. Erro relativo para aproximações de e^x , $x \in [-1, 1]$, com polinómio de Taylor em torno de 0, $P_n(x)$, e grau n usado para cada valor de x de forma a que $\left| \frac{x^n}{n!} \right| \leq 10^{-16}$.

Na FIGURA 2 mostram-se os erros relativos ao aproximar e^x , para $x \in [-1, 1]$, usando polinômios de Taylor de grau n , centrados em 0, a satisfazer $\left| \frac{x^n}{n!} \right| \leq 10^{-16}$. À medida que o valor que se pretende aproximar se afasta de 0, o grau do polinômio a usar vai aumentando, mas a qualidade da aproximação vai sendo menos boa. Isso é cada vez mais evidente quanto maior for a amplitude de valores a considerar para x (FIGURA 3).

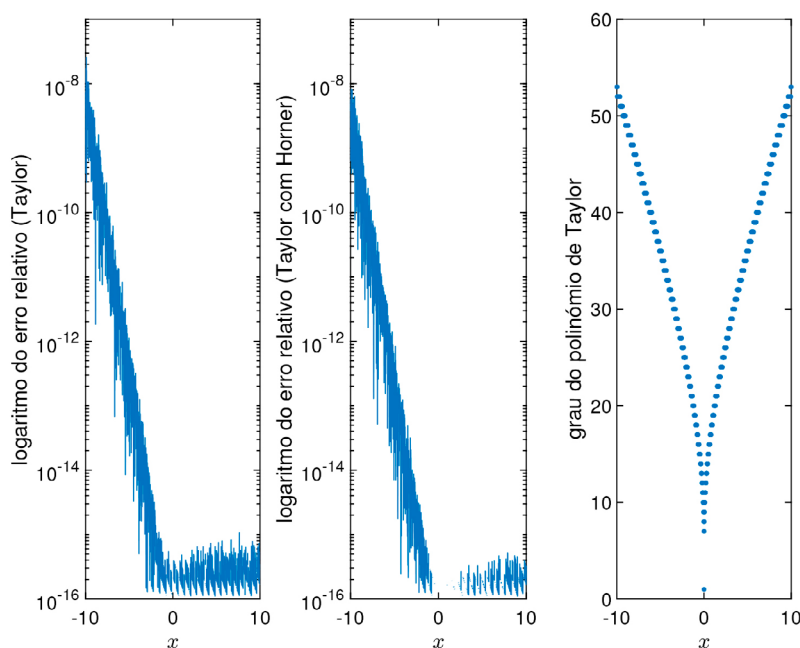


FIGURA 3. Logaritmo do erro relativo para aproximações de e^x , $x \in [-10, 10]$, com polinômio de Taylor em torno de 0, $P_n(x)$, e grau n usado para cada valor de x de forma a que $\left| \frac{x^n}{n!} \right| \leq 10^{-16}$.

Redução da distância do argumento de aproximação

Pode-se recorrer a propriedades das funções para focar a aproximação e assim evitar usar grau polinomial elevado e com perda de qualidade de aproximação.

No caso da função exponencial sabe-se que $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ pode ser uma boa aproximação de e^x desde que x seja próximo de 0. Então uma ideia seria a de “trazer” a aproximação de e^x para “perto” de e^0 . Ora se se considerar $x = l \ln 2 + r$ para um inteiro positivo l e um real r com $|r| \leq \frac{1}{2} \ln 2$ (valor suficientemente próximo de zero) então, $e^x = e^{l \ln 2 + r} = 2^l e^r$.

Resulta imediato que se pode aproximar e^x à custa da aproximação de Maclaurin da exponencial em r e de 2^l que é fácil e eficiente de calcular. Para que l seja inteiro e $|r| \leq \frac{x}{\ln 2}$, de $l = \frac{x}{\ln 2} - \frac{r}{\ln 2}$ pode-se impor que $l = \left\lceil \frac{x}{\ln 2} - \frac{1}{2} \right\rceil$ (arredondamento para cima). Sabendo l e x calcula-se r e usa-se $2^l P_n(r)$ para aproximar $e^x = 2^l e^r$. Da FIGURA 4 ilustra-se que, o erro relativo (em escala logarítmica) é muito bom mesmo para valores distantes de 0 sendo que, o grau polinomial usado foi no máximo de 14.

As aproximações são já muito boas: note-se que para aproximar $e^{500} \approx 1,03610^{217}$ se está a cometer um erro relativo de 2×10^{-14} (i.e., erro na décima quarta casa decimal de um número imensamente grande).

Pode-se fazer ainda melhor recorrendo a abordagens mais sofisticadas e eficientes de efetuar a redução da distância do argumento de aproximação, mas sobretudo, conside-

rando outras aproximações, como interpolação polinomial. Estas matérias de teoria de aproximação e de implementação em computador são abordadas em análise numérica e matemática computacional.

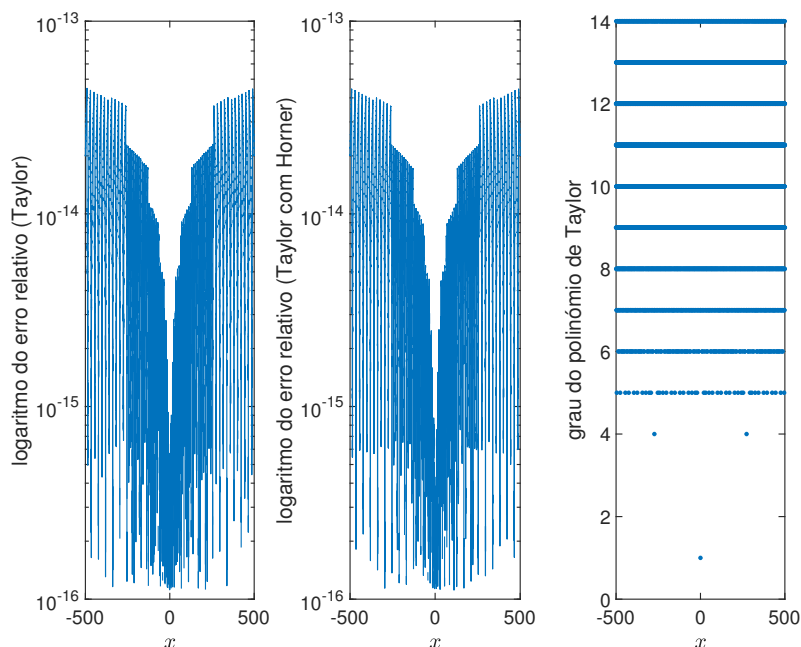


FIGURA 4. Logaritmo do erro relativo para aproximações de e^x , $x \in [-10, 10]$, com polinômio de Taylor em torno de 0, $P_n(x)$, e grau n usado para cada valor de x de forma a que $\left| \frac{x^n}{n!} \right| \leq 10^{-16}$.

O número de Euler

Antes de terminar vai-se destacar que a aritmética efetuada num computador é em precisão finita. Num computador os números racionais têm de ser armazenados num espaço que é finito, em oposição à sua infinitude. Os computadores trabalham numa base 2, resultando daí que muitos números racionais não têm representação exata. Por exemplo, a fração decimal 0,1 não tem representação exata em base 2 mas tem em base 10 ($0,1 = 1 \times 10^{-1}$).

A representação de números reais em computador segue, desde 1985, a norma IEEE-754 na utilização da aritmética binária para números de vírgula flutuante, relativo ao armazenamento, métodos de arredondamento, ocorrência de *underflow/overflow* e realização das operações aritméticas básicas. Um sistema de vírgula flutuante permite representar, com um número fixo de dígitos, números racionais com diferentes ordens de magnitude. A representação finita em base 2 usa 3 componentes: o sinal, o expoente e a mantissa: $[\pm] [\text{mantissa}] \times 2^{[\text{expoente}]}$. O sistema a 64-bits (dupla precisão) usa 1 bit para o sinal, 11 para o expoente e 52 para a mantissa (sendo de 8 bits para o expoente e de 23 bits para a mantissa em precisão simples). O real 0,1 tem a seguinte representação binária em 64-bits: sinal (0), expoente (0111111011) e mantissa 10011001100110011001100110011001100110011001100110011001100110011010, a que corresponde, de volta à base 10, a melhor representação possível de

0.100000000000000005551115123126.

É curioso testar no vosso computador que $0,1 + 0,2 - 0,3 = 5,5511 \times 10^{-17}$ e não 0. Na verdade para o computador tal resultado deve ser considerado 0, pois o cálculo em precisão dupla fornece uma precisão relativa de cerca de 16 dígitos decimais.

A precisão de computador pode ser calculada através do épsilon de máquina: o menor número que separa 1 do próximo número representável ($2,2204 \times 10^{-16}$). O épsilon de um número maior é também maior: o de 100000 é $1,4552 \times 10^{11}$. Assim se efetuarem no vosso computador ou numa calculadora o seguinte cálculo $10^{12} - 10^{12} + 10^{-5}$ o resultado será o esperado 10^{-5} , pois ao subtrair dois números com a mesma representação e adicionarem um terceiro, resulta o terceiro. Mas, a propriedade associativa não existe em vírgula flutuante: o cálculo de $10^{12} - 10^{-5} - 10^{12}$ vale 0. Note-se que o épsilon de 10^{12} é $1,2207 \times 10^{-4}$ e portanto $10^{12} + 10^{-5} = 10^{12}$. O próximo número representável após 10^{12} é $10^{12} + 1,2207 \times 10^{-4}$. Por este facto, os números reais em computador não são uniformemente espaçados. No standard IEEE 754, existe maior representatividade próxima de 0 do que para valores muito grandes em valor absoluto.

Sabe-se que e é irracional e que pode ser aproximado por $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e que portanto este limite corresponde à soma da série de Taylor da função exponencial em torno de 1: $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

A TABELA 1 mostra as aproximações calculadas para e via polinómios de Taylor e através de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, para valores crescentes de n . Ora com um polinómio de Taylor centrado na origem de grau 19 obtém-se quase a precisão máquina, sendo que para graus maiores não há melhoria na aproximação. Já para o cálculo via a expressão do limite, com $n = 100000$ tem-se ainda um erro na sexta casa decimal. Poder-se-ia pensar que o erro relativo baixaria consistentemente para valores crescentes de n . Tal não é o caso atendendo aos erros numéricos, que não vão permitir melhorar a aproximação de e com a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

TABELA 1. Aproximações para o número e e por polinómios de Taylor e por $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

n	$P_n(1)$	erro relativo	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	error relativo
1	2,0000000000000000	0,264241117657115	2,0000000000000000	0,264241117657115
10	2,718281801146385	0,000000010047766	2,593742460100002	0,045815473235769
100	2,718281828459045	0,000000000000000	2,704813829421528	0,004954599959619
1000	2,718281828459045	0,000000000000000	2,716923932235594	0,000499542103852
10000	2,718281828459045	0,000000000000000	2,718145926824926	0,000049995417214
100000	2,718281828459045	0,000000000000000	2,718268237192297	0,000004999947616

Por exemplo, para $n = 10^{15}$ a aproximação calculada é... 3,03503520654926! (com erro relativo 0,116527055720995).

BIBLIOGRAFIA

- ¹ BRISEBARRE, N. et al., *A new range-reduction algorithm*, IEEE Transactions on Computers, 54, 3, 331–339. 2005.
- ² FOUSSE, L. et al., *A multiple-precision binary floating-point library with correct rounding*, ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS), 33, 2, 13. 2007.
- ³ GORDON, S. P., *Approximating functions with exponential functions*, Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 15, 4, 349–362. 2005.
- ⁴ TREFETHEN, L. N., *Approximation Theory and Approximation Practice, Extended Edition*, SIAM. 2019.
- ⁵ WANG, L. et al., *Efficient argument range reduction for implementation of double-precision floating-point exponential function*, World Congress on Intelligent Control and Automation, 2, 6800–6803. IEEE. 2006.