REVISTA DE CIÊNCIA ELEMENTAR

Dioptra

Alzira Faria
ISEP

CITAÇÃO
Faria, A. (2022)
Dioptra,
Rev. Ciência Elem., V10(02):020.
doi.org/10.24927/rce2022.020

EDITOR
João Nuno Tavares
Universidade do Porto

RECEBIDO EM
06 de abril de 2021

ACEITE EM
20 de setembro de 2021

PUBLICADO EM
15 de junho de 2022

O uso de Geometria elementar foi essencial num número variado de aplicações, sobretudo na área da topografia, arquitetura e engenharia, tendo sido o seu uso de extrema importância para medir fisicamente distâncias e alturas com instrumentos de medição simples. A dioptra é um bom exemplo de um instrumento que permitiu o cálculo de distâncias inacessíveis recorrendo ao uso de Geometria elementar.

O desenvolvimento da topografia foi especialmente importante no Egito, pois, após cada cheia do Nilo era necessário restaurar os limites dos terrenos[5].

Richard Talbert[5] destaca a existência de dois procedimentos opostos no levantamento topográfico. Um envolve medir uma certa parte da superfície da terra, anotar elementos artificiais sobre ela e registar o resultado num mapa ou plano desenhado a uma escala adequada. O outro, que o autor designa como "traçado", é o processo inverso: o posicionamento das características pretendidas, limites, edifícios ou obras de engenharia no solo, na posição correta e pretendida. Um agrimensor que pretenda construir, por exemplo, aquedutos ou vias férreas, terá que realizar os dois procedimentos. Primeiro tem que registar a forma do terreno e depois, com essa informação, decidir o melhor percurso e marcá-lo no terreno.

Da necessidade de efetuar medições de terras, nasceu a Geometria grega, e um elemento importante desta Geometria era o estudo dos triângulos e das respetivas semelhanças. Lucio Russo, no seu livro *The Forgotten Revolution*, afirma[4]: "*Heródoto atribui aos egípcios a introdução da Geometria, no sentido original da medição do terreno, e especifica que esta surgiu da necessidade de estimar, para efeitos fiscais, a quantidade de parcelas de terreno que foram corroídos pelo Nilo. Quando a Geometria grega se lançou no seu espetacular curso de desenvolvimento, as suas aplicações concretas, tais como a agrimensura e a topografia, foram reclassificadas sob a rubrica de geodesia. Infelizmente, existe escassa documentação direta sobre a evolução destas técnicas desde a fase empírica, comum a muitas civilizações antigas, até à topografia e cartografia baseadas na ciência helenística*".

O desenvolvimento de uma teoria de topografia mais sofisticada e de instrumentos mais versáteis apareceu no início do século III a.C.[5] aquando da criação da biblioteca e do museu em Alexandria. Os instrumentos de levantamento topográfico começaram a basearem-se na teoria científica que foi sendo alimentada a partir da experiência prática. O conhecimento sobre a topografia Grega advém de quatro tratados técnicos, mas apenas o de Heron de Alexandria, *A Dioptra*, do século I d.C. está quase completo. Dos outros, existem fragmentos de manuais anónimos, que se pensam ser dos séculos III e II a.C. e que foram encontrados posteriormente em obras de autores, como Julius Africanus (Anonymus Byzantinus) e al-Karaji[2]. O conteúdo consiste em exercícios práticos acompanhados de diagramas geométricos.

Etimologicamente, a palavra *dioptra* significa algo para ver através. Para o levantamento topográfico, supõe-se que tenha começado por ser um tubo de visão estreito suspenso horizontalmente por fios ou correntes. Segundo Richard Talbert[5], é possível que tenha sido adotada pelo Gregos no século VI a.C. mas concebida pela primeira vez na Pérsia para manter o alinhamento e a inclinação ao construir *qanats*, túneis de captação de água. Já no final do século III a.C., o tubo evoluiu para a alidade — uma barra onde, em cada extremidade, existiam pínulas ou palhetas que serviam de miras. Como era difícil alinhar o buraco com o alvo, adicionaram fendas estreitas para facilitar a visão.

Como já referido, o manuscrito que fala sobre topografia e de um dos instrumentos usados por ela é a *A Dioptra*. Ainda existem exemplares deste manuscrito e podem ser encontrados, um na Biblioteca Real de Viena, outro na Biblioteca da Universidade de Estrasburgo e outro na Biblioteca Nacional de Paris[1]. Segundo Papadopoulos[3], a obra começa com uma introdução à "ciência da dioptra" e descreve o instrumento como combinação de teodolito e nível de água. Heron apresenta nesta obra todos os trabalhos anteriores sobre o tema mas rapidamente os dispensa e dá instruções sobre como construir uma dioptra e como utilizá-la. Apesar de não haver conhecimento da existência de um exemplar físico da dioptra feito na antiguidade, vários autores fizeram uma interpretação do que foi dito por Heron propondo uma reconstrução e inserindo elementos básicos que lhes era úteis, ou seja, diferiam em pequenos detalhes. Segundo Gallo[1], desde o século XIX vários autores têm vindo a apresentar propostas, nomeadamente, Venturi, em 1814, Vincent, em 1858 (FIGURA 1A)) e Schöne, em 1899, voltando a aprofundar o assunto em 1903 (FIGURA 1B)). Mais tarde, surgem novas propostas de Drachmann em 1935, 1954 e 1968, a que se segue Adam, em 1982[2].

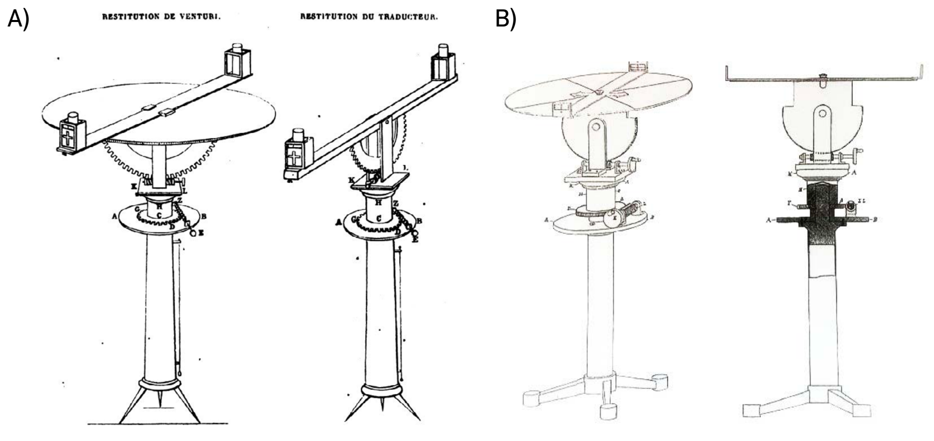

FIGURA 1. Reconstrução gráfica da dioptra. A) Venturi, 1814 e Vincent, 1858[6]. B) Schöne, 1899[2].

Na obra de Richard Talbert[5] podemos ler a descrição de uma experiência de reconstrução de uma dioptra padrão com um disco de madeira com 60 cm de diâmetro (FIGURA 2) e, uma vez que as fontes são completas, o autor descreve-a como uma reconstrução que está próxima da verdade. Funciona tanto no plano horizontal como no plano vertical.

FIGURA 2. Dioptra padrão reconstruída no modo horizontal e vertical[5].

Quando está montada horizontalmente sobre um tripé, com a ajuda de uma junta giratória, é usada para projetar linhas retas em qualquer direção, para marcar o solo e, segundo Richard Talbert, também pode ser usada para traçar retas perpendiculares a retas já traçadas por meio de diâmetros em ângulo reto inscritos no disco. Ainda, segundo o autor, um quarto da borda é graduado em graus e foi usado para observações celestes, mas não para levantamentos terrestres.

No seu nível mais básico, o uso da dioptra consiste em traçar ângulos retos, projetar linhas pela mira através da alidade em ambas as direções e construir triângulos semelhantes a outros triângulos já construídos.

Sabe-se que, se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois lados em pontos distintos do vértice, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro (FIGURA 3). Assim, se dois triângulos têm lados correspondentes proporcionais, então eles são semelhantes — critério LLL. Este resultado será usado diversas vezes nos exemplos que serão vistos à frente.

$$\frac{|CB|}{|EF|} = \frac{|CA|}{|EA|} = \frac{|BA|}{|FA|} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta AFE$$

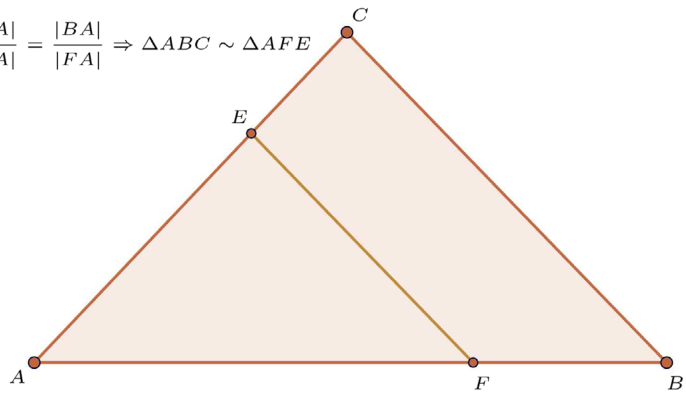

FIGURA 3. Semelhança de triângulos.

Os exemplos do uso da dioptra, especialmente os de Heron, são em levantamentos de terras, obras de Engenharia e ainda mapeamento. Por exemplo, na guerra, o uso da dioptra é fundamental e típico. Um exército em marcha pode ver-se obrigado à necessidade de construir uma ponte se encontrarem um rio que lhes impede a passagem.

Calcular a distância de um ponto de uma das margens de um rio a um ponto da margem oposta

Podemos ver uma aplicação da dioptra para calcular a distância de um ponto de uma das margens de um rio a um ponto da margem oposta. Na FIGURA 4 consideramos que CD e MN são as margens de um rio. Posiciona-se a dioptra na margem MN no ponto A e vira-se a alidade até que o ponto N, na margem MN, seja visível através dela. Roda-se a alidade e escolhe-se uma marca, que vamos designar por B, do outro lado do rio, na margem CD, de forma que seja vista através da alidade e que AB forme um ângulo reto com AN. Para simplificar, o autor[2] supõe que as margens sejam paralelas. Assim, AB é perpendicular a ambas as margens do rio e será considera a largura do rio.

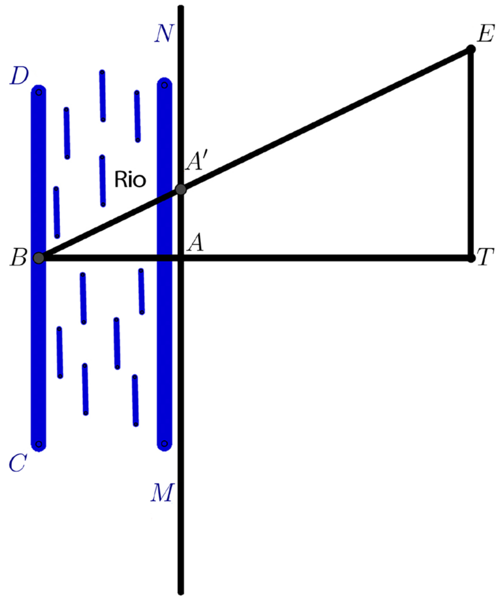

FIGURA 4. Largura de um rio.

Para proceder à descoberta da distância horizontal de A a B, ainda com o auxílio da dioptra, temos o ponto A junto a nós e o ponto B afastado. Posicionando a dioptra no ponto A, roda-se a alidade até que o ponto B seja avistado. Dá-se a volta para o outro lado da alidade, ajustando o plano de visão se necessário e, sem mover mais nada, marca-se o ponto T, que se encontra do nosso lado e no alinhamento de A e B. Depois, com o auxílio da dioptra, traça-se um segmento de reta TE perpendicular a BT. Move-se a dioptra para o ponto E e ajusta-se a alidade de forma a visualizar B e na interseção de BE com a linha perpendicular a AT que passa por A marcamos o ponto A'. Desta forma, estamos perante dois triângulos retângulos, BAA' e BTE, com AA' paralelo a TE. Temos que,

$$\frac{TE}{AA'} = \frac{TB}{AB}$$

Como $TB = TA + AB$, $\frac{TE}{AA'} = \frac{TA+AB}{AB} \Leftrightarrow AB \cdot TE = TA \cdot AA' + AB \cdot AA'$

$$AB = \frac{TA \cdot AA'}{TE - AA'}$$

Assim encontramos a medida procurada AB uma vez que AA', TE e TA podem ser medidas no local.

Quando se pretendem fazer medições em altura, a dioptra é suspensa verticalmente (FIGURA 2) numa base horizontal sobre um tripé, onde atua como o seu próprio prumo. A linha do diâmetro está na vertical e a alidade na horizontal. A imagem é observada numa vara alta colocada na vertical e segura por um assistente que, na direção do topógrafo, move um cursor para cima ou para baixo de forma a fazer coincidir com a linha horizontal de visão.

Das várias funções associadas à dioptra, o nivelamento é uma das mais importantes, principalmente quando aplicada à construção de canais de irrigação e mais tarde nos aquedutos. Das várias fontes existentes ilustradas com diagramas maioritariamente de representação geométrica e com uso de instrumentos, temos conhecimento de quatro métodos diferentes, propostos por Al-Karaji (dois métodos), Philo de Bizâncio e Heron[2]. Três deles, ainda não muito perfeitos, propostos por Al-Karaji e Philo, e um método proposto por Heron que tornou possível alcançar um grande avanço de tal forma que prevalece até à atualidade. Al-Karaji preocupou-se apenas com o nivelamento para a irrigação e, em ambos os métodos que propõe, tem em conta a altura do instrumento acima do solo. Esta altura, em teoria, deveria ser sempre a mesma, mas devido à irregularidade do terreno e da forma como é fixado ao chão, as leituras podem-se tornar imprecisas.

Todo o processo dos diferentes métodos consiste em alternar entre as posições da equipa e a posição e altura do instrumento. Na que se supõe ser a primeira proposta de Al-Karaji (FIGURA 5) pretende-se determinar a altura x (inclinação do terreno) e, para isso, é fixada uma vara numa posição aleatória. Move-se o instrumento a uma distância d_1 para um dos lados da vara, faz-se a leitura na vara e fixa-se o ângulo de inclinação do instrumento. Sem alterar a configuração do instrumento obtida, move-se o instrumento uma distância d_2, igual a d_1, para o outro lado da vara (FIGURA 5) e faz-se a leitura da nova medida. O valor pretendido x é obtido fazendo a diferença das duas medidas.

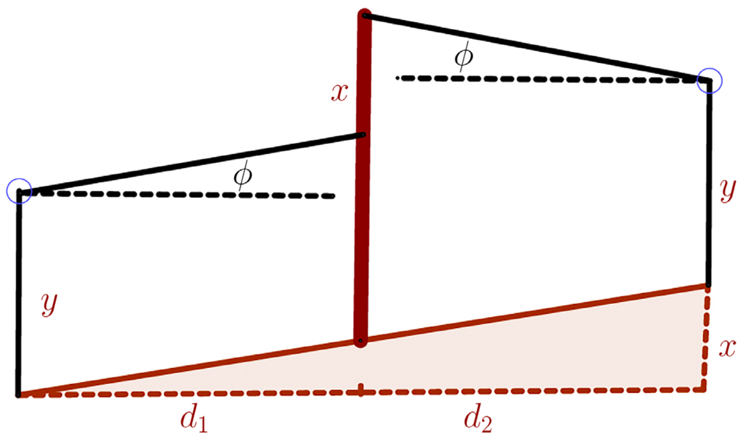

FIGURA 5. Método de Al-Karaji I[2].

Philo de Bizâncio apresenta um método mais simples e tem por objetivo trabalhar um lote de terra até que esteja nivelado e adequado para irrigação (FIGURA 6). O agrimensor coloca-se ao lado da saída da fonte de água com o instrumento posicionado o mais horizontalmente possível. Do outro lado, e a uma distância qualquer, conveniente, prática e não especificada, está uma equipa com uma vara não graduada, mas pintada com círculos coloridos de forma que sejam visíveis facilmente à distância. Mede-se a altura do chão até à marca e obtém-se a medida x pretendida.

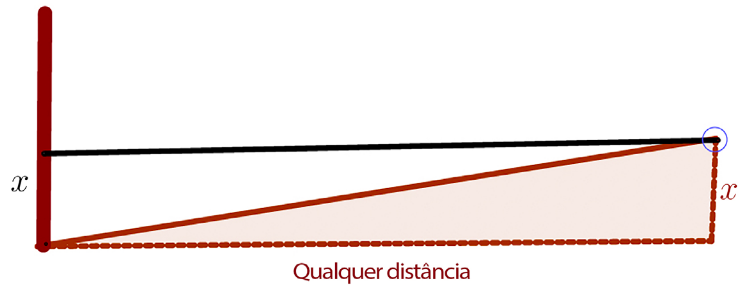

FIGURA 6. Método de Philo[2].

O segundo método de Al-Karaji é semelhante ao método de Philo exceto que tem em conta a altura do instrumento (FIGURA 7). Na vara é marcado a vermelho a altura do instrumento, fazendo a diferença entre a leitura na vara e a altura do instrumento, obtemos a medida x pretendida. Também aqui, a distância entre o instrumento e a vara não é importante, dando bastante flexibilidade ao agrimensor, não obrigando a fixar distâncias.

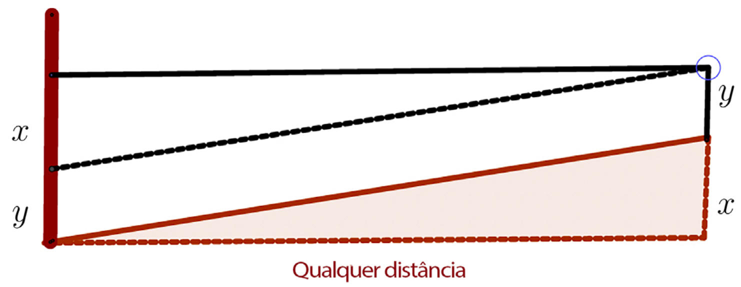

FIGURA 7. Método de Al-Karaji II[2].

Heron percebeu que, em vez do instrumento mudar de lugar, deveria ser a vara, fixando o instrumento. Desta forma, a altura do instrumento é irrelevante (FIGURA 8). O instrumento é fixado e são colocadas duas varas a uma qualquer distância do instrumento. A altura x é obtida fazendo a diferença entre as duas leituras nas varas.

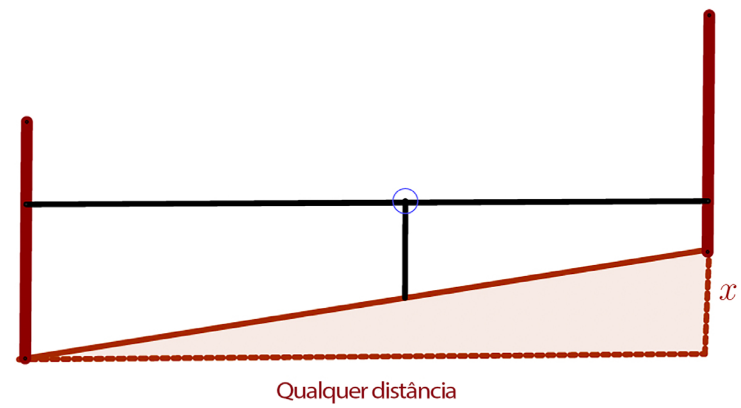

FIGURA 8. Método de Heron[2].

Encontrar a altura de um muro sem se aproximar

Outro uso da dioptra, este na esfera militar, consiste em medir a altura de um muro. Um comandante está a cercar uma cidade e quer assaltá-la. Para construir escadas ou torres de cerco precisa saber a altura do muro.

Esta experiência está descrita nos manuais antigos[2] e requer duas fases para estimar a altura de um muro. Uma fase com a dioptra em modo horizontal (FIGURA 9) e outra com o instrumento em modo vertical (FIGURA 10). Começamos por estimar a distância do muro ao local de observação AB (FIGURA 9). Posicionamos o observador no ponto A de forma a que seja possível avistar a base do muro B. Traça-se uma perpendicular AF a AB e define-se uma distância arbitrária até um ponto G, situado no segmento AF. Traça-se uma paralela a AB e, portanto, perpendicular a AF a partir de G. Colocamos o observador em F de forma a observar o muro, B, e define-se o ponto H como sendo o ponto de interseção de FB com a reta, traçada anteriormente, que é perpendicular a AF e que passa por G. Após a marcação dos pontos A, G, F, e H conforme o esquema da FIGURA 9, procede-se à medição de AF, GF e GH.

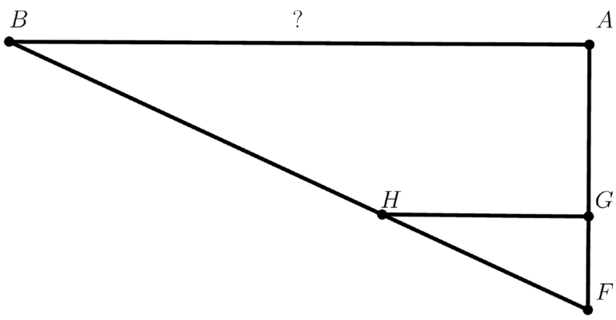

FIGURA 9. Medições no plano[2].

Como os triângulos FGH e FAB são semelhantes, podemos estimar o valor de AB:

$$\frac{AB}{GH} = \frac{AF}{GF} \Leftrightarrow AB = \frac{AF \cdot GH}{GF} \tag{1}$$

Para proceder às medições em altura (FIGURA 10), posicionamos o observador em A e uma vara graduada ED numa posição arbitrária, seja E. Do ponto A o observador avista o topo do muro, AC, e define o ponto de interseção com a vara em D. Do ponto A, o observador avista a base do muro, AB, e define o ponto de interseção com a vara em E. Desta forma será possível fazer a medição, na vara, de ED, e ainda, a medição da distância AE.

Como estamos novamente perante triângulos semelhantes, AED e ABC, em conjunto com AB, determinado em (1), conseguimos estimar o valor a altura do muro, BC:

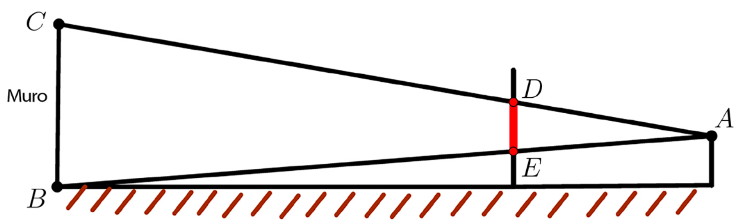

FIGURA 10. Medições em altura[2].

$$\frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC} \Leftrightarrow BC = \frac{DE \cdot AB}{AE}. \qquad (2)$$

Esta experiência foi realizada por Richard Talbert[5] para medir a altura de uma chaminé e quando foi feita a medição direta da altura real da chaminé o autor verificou que o cálculo deu um valor menor em 11cm, errando em apenas 0,13%. Dado que a chaminé se encontrava a 293m de distância, foi um resultado respeitável.

Outras possíveis utilizações da dioptra são a determinação da altura perpendicular de um ponto visível acima do plano horizontal desenhado através da nossa posição, sem nos aproximarmos desse ponto e a determinação da profundidade de um fosso perpendicular à altura do seu chão até ao plano horizontal, quer através da nossa posição ou através de qualquer outro ponto.

Encontrar a altura de um ponto visível acima do nosso plano horizontal

Fixamos o ponto alto A e posicionamo-nos em B[2]. Posicionamos a dioptra em B (FIGURA 11) apoiada numa coluna, BT. Ajusta-se a alidade ETE_1 de forma a avistar A, fixa-se a sua posição e, sem mover a dioptra, colocamos duas varas verticais P_3H e P_2K, de alturas diferentes. A mais alta deve ser colocada mais perto do ponto A, P_2K.

Vamos supor que a superfície do solo tem uma forma do tipo $BP_3P_2P_1$, e imaginamos o plano horizontal a partir da nossa posição como sendo BA'. Movem-se as varas P_3H e P_2K até que apareçam em linha reta com o ponto A, sem que a alidade se mova. Observamos o ponto H na vara P_3H e o ponto K em P_2K. A projeção de P_3H e P_2K no plano horizontal BA' define os pontos M e N e as linhas HZ e KO são paralelas ao plano horizontal BA'. Determinamos o quanto P_3 é maior que B, nivelando B e P_3 do nosso lado. Depois, determinamos P_3M e, analogamente, NP_2.

Uma vez que conhecemos o valor de HP_3 e HP_2, determinamos a altura de HM, KN e obtemos KZ fazendo a diferença entre as duas alturas. O comprimento HZ também é conhecido, pois é a distância horizontal entre P_3 e P_2. Portanto, o $\frac{HZ}{KZ}$ é conhecido.

Consideremos a perpendicular $AOPA'$ definida a partir de A, com o plano horizontal BA'. Definimos assim dois triângulos semelhantes HZK e KOA. Então, $\frac{HZ}{ZK} = \frac{KO}{AO}$ e como KO é conhecido, pois é igual à distância horizontal entre P_2 e P, obtemos a altura $AO = KO \times \frac{ZK}{HZ}$.

Sabemos ainda o valor de OA', uma vez que é igual ao valor de KN. Portanto, a altura AA' é conhecida:

$$AA' = AO + OA' = AO + KN$$

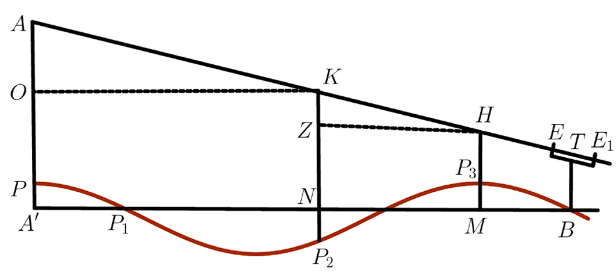

FIGURA 11. Altura.

Encontrar a profundidade de um fosso

Seja $ABCD$ um fosso e B um ponto no fundo do fosso[2]. Coloca-se a dioptra num ponto qualquer, seja E (FIGURA 12). EI' é o apoio da dioptra e I_1I_2 a alidade. Inclina-se a alidade até que B seja visível. Imaginamos o solo como sendo $DEFGM$ e $ADHO$ o plano base da nossa posição. Alinha-se com a alidade I_1I_2, duas varas FN e MQ. Avistamos, e é feito o registo dos pontos N na vara FN e Q na vara MQ.

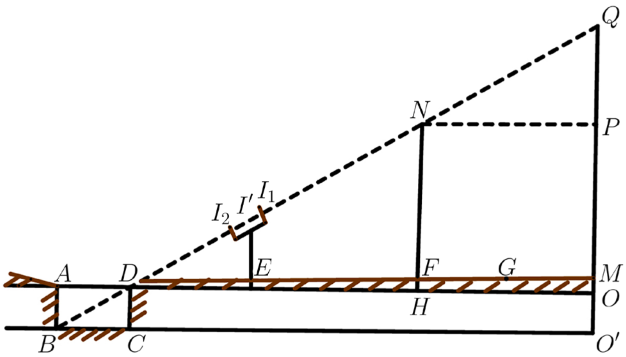

FIGURA 12. Profundidade de um fosso[2].

O problema consiste em encontrar a altura da perpendicular de B ao plano horizontal ADO, seja AB. Considera-se o plano horizontal, BO', que contém B, prolonga-se a vara MQ até O' e a vara FN até H e imagina-se ainda, partindo de N, a linha NP paralela a DO. NP pode ser obtido uma vez que é igual ao intervalo entre F e M, que pode ser medido. Também pode ser medido FH e MO, e obtemos QP fazendo a diferença entre QPO e NH (procedimento semelhante ao utilizado para encontrar a altura de um ponto visível acima do nosso plano horizontal).

Temos que,

$$\frac{NP}{QP} = \frac{BO'}{QO'}$$

Como $QO' = QO + OO', OO' = AB$ e $BO' = AO$, então

$$\frac{NP}{QP} = \frac{AO}{QO+AB} \Leftrightarrow QO.NP + AB.NP = AO.QP$$

Ou seja,

$$AB = \frac{AO.QP - QO.NP}{NP}.$$

Conclusão

Apesar de nenhuma dioptra da Antiguidade ter chegado aos nossos dias, sabemos que era o instrumento de levantamento topográfico padrão dos antigos gregos. Conhecemos vários usos da dioptra, que envolvem medir a distância entre pontos afastados sem se aproximar deles, uma prática muito usada para fins militares ou para mapeamento nas montanhas[2]. Este instrumento permitiu o cálculo de distâncias inacessíveis recorrendo ao uso de triângulos semelhantes tendo a vantagem de não necessitar de trigonometria e consequentemente, sem necessidade de recorrer a tabelas trigonométricas. Analisando os vários modelos propostos percebe-se que o método, sendo simples, apenas exige cuidado no manuseamento do instrumento, obtendo um funcionamento tanto mais correto quanto melhor for a precisão da sua construção. As obras de engenharia que sobreviveram mostram a importância do uso da dioptra.

REFERÊNCIAS

[1] GALLO, I. M. G., *Nuevos Elementos de Ingeniería Romana*, *III Congresso da las Obras Públicas Romanas*, Astorga. 2006.

[2] LEWIS, M. J. T., *Surveying Instruments of Greece and Rome*, *Cambridge University Press*, 2001.

[3] PAPADOPOULOS, E., *Heron of Alexandria*, *National Technical University of Athens*. 2007.

[4] RUSSO, L., *The Forgotten Revolution, How Science Was Born in 300 BC and Why it Had to Be Reborn*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2004.

[5] TALBERT, R. J. A., *Ancient Perspectives: Maps and Their Place in Mesopotamia, Egypt, Greece, and Rome*, *University of Chicago Press*. 2012.

[6] VINCENT, A. J. H., *Extraits des Manuscrits relatifs A La Géométrie Pratique des Grecs*, Imprimerie Impériale. 1748.