

Ondas de gravidade em fluidos

CITAÇÃO

Lage, E. (2022)

Ondas de gravidade em fluidos,
Rev. Ciência Elem., V10(03):038.

doi.org/10.24927/rce2022.038

EDITOR

João Nuno Tavares,
Universidade do Porto

EDITOR CONVIDADO

José Francisco Rodrigues
Universidade de Lisboa

RECEBIDO EM

03 de março de 2021

ACEITE EM

19 de março de 2021

PUBLICADO EM

14 de outubro de 2022

COPYRIGHT

© Casa das Ciências 2021.
Este artigo é de acesso livre,
distribuído sob licença Creative
Commons com a designação
[CC-BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/), que permite
a utilização e a partilha para fins
não comerciais, desde que citado
o autor e a fonte original do artigo.

rce.casadasciencias.org



Eduardo Lage
Universidade do Porto

Atirar uma pedra a um tanque ou o pingar de uma gota numa bacia com água são excelentes oportunidades para se observarem e estudarem as ondas de gravidade^a, um importante tópico da mecânica de fluidos². Estes exemplos não podem esquecer que este conceito também se aplica a ondas no mar, a rios ou lagos, a diversos fenómenos atmosféricos ou simplesmente ao fluido que enche um copo ou uma proveta¹.

Uma onda de gravidade é um fenómeno periódico, no tempo e no espaço, que se manifesta na superfície de separação de dois fluidos, sendo água e ar os mais comuns pelo que serão, aqui, considerados como exemplos típicos. Em equilíbrio no campo gravítico da Terra, a superfície que separa os dois fluidos é plana e horizontal (para distâncias curtas comparadas com o raio da Terra), servindo como referência, ficando a água abaixo e o ar acima deste plano. Nesta primeira abordagem, o ar serve, apenas, para manter uma pressão atmosférica que se admite ser constante e uniforme na superfície de separação — mais adiante, será discutido qualitativamente o efeito que uma onda de gravidade tem no ar. A água é considerada um fluido incompressível (*i.e.*, densidade constante), sem viscosidade.

Uma pequena perturbação na superfície afastá-la-á do plano de referência, elevando-a acima do plano numas zonas e baixando-a noutras zonas. Imaginemos dois pontos na água à mesma distância do plano de referência (FIGURA 1).

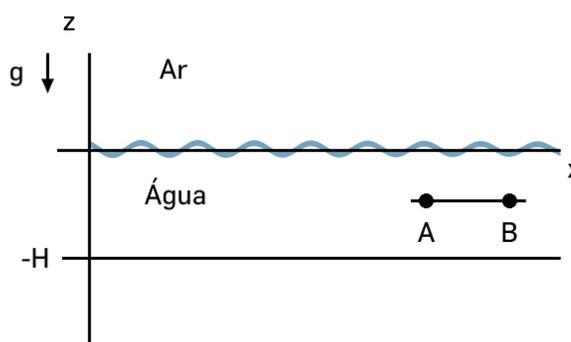


FIGURA 1. Onda de gravidade num canal ou tanque.

O ponto A, situado abaixo de uma elevação instantânea da superfície de separação, apresenta uma maior pressão hidrostática que a verificada no ponto B, localizado abaixo de uma depressão da mesma superfície. Esta diferença de pressões empurra a água de A para B, baixando a superfície em A e subindo-a em B, originando, assim, uma propagação destas alterações na superfície — esta propagação é a onda de gravidade. Começaremos por estudar o caso mais simples: ondas longas em águas rasas, conceitos que se tornarão precisos mais adiante. Designamos por H a profundidade da água, *i.e.*, a distância do plano de referência ao fundo, suposto plano e horizontal, onde assenta a água. Iremos, aqui, apenas considerar que a onda de gravidade se propaga numa única direção que tomaremos para eixo x ; o eixo z tem a direção vertical; e o eixo y , que não desempenhará qualquer papel nesta abordagem, é perpendicular aos anteriores, podendo admitir-se que a água está confinada a um canal ou um tanque, de largura b .

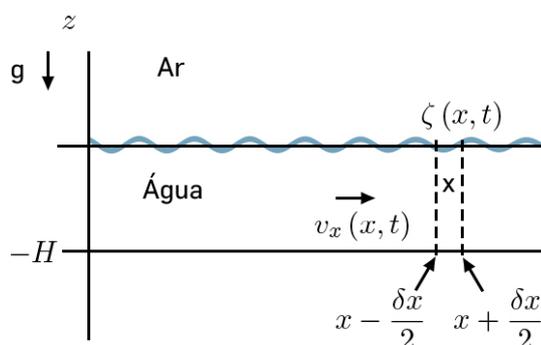


FIGURA 2. Parametrização de uma onda de gravidade.

Designamos por $\zeta(x, t)$ a elongação instantânea que a superfície de separação apresenta num dado ponto e num dado instante: se $\zeta > 0$ ($\zeta < 0$), o nível da água está acima (abaixo) do plano de referência. Admitimos ser $\zeta \ll H$: trata-se, pois, de uma pequena perturbação em relação ao equilíbrio. O movimento do fluido faz-se, essencialmente, na direção x : designamos por $v_x(x, t)$ essa velocidade, ignorando quer a componente v_z , quer qualquer dependência de v_x com a profundidade, dado esta ser pequena (“águas rasas”), por hipótese. Nestas condições, as equações que regem o movimento do fluido deduzem-se facilmente. Para isso, consideremos a porção de fluido instantaneamente situado em $\left[x - \frac{\delta x}{2}, x + \frac{\delta x}{2}\right]$, como se mostra na FIGURA 2. Então:

a) Conservação de massa

A massa situada no domínio indicado é $\delta M = \rho b (H + \zeta(x, t)) \delta x$, onde ρ é a massa específica do fluido (água). Deste modo, a conservação de massa impõe que, durante um pequeno intervalo de tempo δt , o aumento da massa δM seja igual à massa que entra naquele domínio. Ora, em $x - \frac{\delta x}{2}$, entra a massa:

$$\rho b \left(H + \zeta \left(x - \frac{\delta x}{2}, t \right) \right) v_x \left(x - \frac{\delta x}{2} \right) \delta t \simeq \rho b H v_x \left(x - \frac{\delta x}{2}, t \right) \delta t$$

e em $x + \frac{\delta x}{2}$ sai a massa $\rho b H v_x \left(x + \frac{\delta x}{2}, t \right) \delta t$. Então:

$$\delta t \frac{d}{dt} \delta M = \delta t \rho b \frac{\partial \zeta}{\partial t} \delta x = \rho b H \delta t \left[v_x \left(x - \frac{\delta x}{2}, t \right) - v_x \left(x + \frac{\delta x}{2}, t \right) \right] = -\rho b H \delta t \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta x$$

Isto é:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -H \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (1)$$

b) Lei fundamental da dinâmica

Ignorando a tensão superficial, que será considerada mais adiante, a pressão no interior da água é suposta ser a pressão hidrostática, que deve reduzir-se à pressão atmosférica (p_a) na superfície de separação, *i.e.*, $p = p_a + \rho g (\zeta(x, t) - z)$. Então:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

Isto é:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (2)$$

Combinando as equações 1 e 2, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (3)$$

onde:

$$c_0 = \sqrt{gH} \quad (4)$$

é a velocidade de propagação das ondas de gravidade nas condições referidas. A velocidade do fluido v_x satisfaz à mesma equação 3, conhecida genericamente por equação de onda³ (a uma dimensão espacial). Note-se a ausência de dispersão (c_0 é uma constante), em contraste com o que acontece quando se considera a tensão superficial ou profundidades arbitrárias, como se verá adiante.

Antes de prosseguirmos, é conveniente analisar a componente v_z do campo de velocidades que, recorde-se, foi ignorada. Tal será justificado se for $v_z \ll v_x$. Ora, v_z deve anular-se no leito da água (*i.e.* $z = -H$) e atingir o seu maior valor, $v_z = \dot{\zeta}$, na superfície de separação. Então, podemos ignorar v_z se for $\left| \dot{\zeta} \right| \ll |v_x|$ ou, pela equação 1, $H \left| \frac{\partial v_x}{\partial x} \right| \ll |v_x|$. Se v_x variar periodicamente numa distância λ , como acontece numa onda, então $\frac{\partial v_x}{\partial x} \sim \frac{v_x}{\lambda}$. Assim, a condição anterior fica $\lambda \gg H$, o que justifica a designação de "ondas longas em águas rasas".

Tem muita importância e interesse analisar as soluções harmónicas da equação 3. Estas soluções dependem do tempo através das funções trigonométricas seno ou co-seno. Como a equação 3 é linear, é válido o princípio da sobreposição pelo que podemos genericamente estudar soluções do tipo onda plana e monocromática:

$$\zeta(x, t) \equiv \text{Re} \left[\hat{\zeta}_0 e^{ik_x x - i\omega t} \right] \quad (5)$$

onde $\hat{\zeta}_0$ é a amplitude (complexa) da onda, ω é a frequência angular e k_x é o vetor de onda. Observemos que estas soluções são periódicas no tempo com o período:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (6)$$

sendo habitual designar por frequência o inverso do período. Analogamente, vemos que $\zeta(x, t)$ é espacialmente periódica, sendo o período espacial conhecido por comprimento de onda (o seu inverso é o número de onda).

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_x} \quad (7)$$

Inserindo a expressão (5) na equação 3, obtemos a relação de dispersão:

$$k_x = \pm \frac{\omega}{c_0} \quad (8)$$

No caso presente, a relação é linear e a ela nos referimos pela frase “ondas sem dispersão”, como também acontece em ondas acústicas e eletromagnéticas (no vázio), mas não é o caso geral. É fácil ver que a solução $k_x > 0$ representa uma onda que se propaga para a direita, enquanto $k_x < 0$ representa uma onda que se propaga para a esquerda. Aceitando $k_x > 0$, a fase da onda de amplitude é a função:

$$\phi(x, t) = k_x x - \omega t$$

Vemos que a fase em (x, t) é a mesma em $(x + \delta x, t + \delta t)$ se $\delta x = \frac{\omega}{k_x} \delta t$; assim, $\frac{\omega}{k_x}$ é, genericamente, a velocidade de propagação de fase, sendo, no caso presente, igual a c_0 .

Usando a equação 4, vemos que esta velocidade é 1m/s para H=10 cm (onda de lavatório), 10 m/s para H=10 m (onda de mar) e 200 m/s para H=4000 m (*tsunami*).

Não se deve confundir a velocidade de fase da onda com a velocidade do fluido — esta oscila sinusoidalmente e o seu valor depende das condições iniciais; aquela representa a velocidade de propagação dos máximos (ou mínimos) da amplitude à superfície.

A propagação de uma onda de gravidade faz-se acompanhar de uma propagação de energia. De facto, a energia contida, num dado instante, entre os planos verticais $x = x_1$ e $x = x_2 > x_1$ é constituída por duas parcelas:

1.ª Energia cinética

$$K(t) = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{1}{2} \rho b H v_x^2$$

2.ª Energia potencial gravítica

$$U(t) = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{-H}^{\zeta} dz \rho b g z = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{1}{2} \rho g b (\zeta^2 - H^2)$$

Assim:

$$E(t) = K(t) + U(t) = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} dx b \rho (H v_x^2 + g (\zeta^2 - H^2))$$

Então:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int_{x_1}^{x_2} dx b \rho \left(H v_x \frac{\partial v_x}{\partial t} + g \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) = - \int_{x_1}^{x_2} dx b \rho \left(H g v_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + H g \zeta \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) = \\ &- \int_{x_1}^{x_2} dx b \rho g H \frac{\partial}{\partial x} (\zeta v_x) \end{aligned}$$

Aqui, usamos as equações 1 e 2 para obter o resultado final. Identificamos o fluxo de energia:

$$J(x, t) \equiv \rho g b H \zeta(x, t) v_x(x, t) = \rho b c_0^2 \zeta(x, t) v_x(x, t) \quad (9)$$

Com efeito, o resultado anterior pode escrever-se:

$$\frac{dE}{dt} = J(x_1, t) - J(x_2, t)$$

que, por palavras, se lê: o aumento, por unidade de tempo, da energia no intervalo $[x_1, x_2]$ é igual à energia que entra em x_1 menos a energia que sai em x_2 .

Para calcularmos este fluxo, temos de usar as representações reais dos campos ζ e v_x . Mas se quisermos calcular a média sobre um período de oscilação, o resultado é bastante simples:

$$\langle J(x) \rangle = \frac{1}{2} \rho b c_0^2 \text{Re} [\zeta v_x^*] \quad (10)$$

(o asterisco representa complexo conjugado). Considerando, por exemplo, a onda monocromática atrás escrita, começamos por notar que a equação 2 dá $v_x = \frac{k_x g}{\omega} \zeta = \frac{g}{c_0} \zeta$, pelo que:

$$\langle J(x) \rangle = \frac{1}{2} \rho b g c_0 \left| \hat{\zeta}_0 \right|^2 \quad (11)$$

Uma onda de 1 m de amplitude no mar com a profundidade de 4000 m transporta a mesma energia que uma onda de ~ 4.5 m quando a profundidade é de 10 m. É esta a força destruidora de um tsunami. No canhão da Nazaré, a amplitude ainda é maior porque a largura b torna-se muito menor nas proximidades da praia — a onda fica encurralada, sendo obrigada a subir em altura.

O efeito da tensão superficial

A tensão superficial é uma força que se manifesta na superfície de um fluido e que tem origem na parte atractiva das forças moleculares. A sua caracterização é simples: imaginemos uma curva fechada na superfície — em cada elemento da linha, de comprimento dl , a tensão superficial é a força exercida pela parte da superfície no exterior da linha, sendo tangente à superfície e perpendicular à linha, dirigida para o exterior da curva, com o valor σdl , onde σ é uma constante. Consideremos a FIGURA 2 e atentemos na porção de superfície em $\left[x - \frac{\delta x}{2}, x + \frac{\delta x}{2}\right]$.

A tangente à linha, em qualquer ponto, é o vetor $\left(1, 0, \zeta'(x, t)\right)$, onde a plica indica derivada em ordem a x , podendo considerar-se normalizada à unidade porque temos vindo a desprezar termos quadráticos em ζ . Assim, a tensão superficial é $\sigma b \left(1, 0, \zeta' \left(x + \frac{\delta x}{2}, t\right)\right)$, no extremo direito daquele intervalo, e $-\sigma b \left(1, 0, \zeta' \left(x - \frac{\delta x}{2}, t\right)\right)$, no extremo esquerdo.

A resultante destas forças é, pois, $\sigma b \zeta'' \delta x$ segundo o eixo vertical.

Devido a isto, a pressão exercida pelo fluido num ponto da superfície não é mais igual à pressão atmosférica, tendo-se, agora, $p(x, \zeta) b \delta x + \sigma b \zeta'' \delta x = p_a b \delta x$, i.e., $p(x, \zeta) = p_a - \sigma \zeta''$. Assim, no interior do fluido, o campo hidrostático da pressão é $p(x, z) = p(x, \zeta) + \rho g (\zeta - z) = p_a - \sigma \zeta'' + \rho g (\zeta - z)$, o que modifica a equação 2, obtendo-se:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \sigma \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}$$

A equação 1, exprimindo a conservação de massa, não é modificada. Eliminando a velocidade entre estas equações, obtemos:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = H \left[g \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} \right]$$

Para uma onda plana monocromática, é $\zeta \propto e^{-i\omega t + ik_x x}$, deduzindo-se a relação de dispersão:

$$\omega^2 = g H k_x^2 (1 + a^2 k_x^2) \quad (12)$$

onde $a = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$ é conhecida por constante capilar. Existe, pois, dispersão de ondas que,

porém, pode ser ignorada se $k_x a \ll 1$. Para a água é $\sigma = 72.8 \times 10^{-3} \text{ N/m}$, pelo que $a \simeq 3 \text{ mm}$.

Assim, a tensão superficial não pode ser ignorada para comprimentos de onda inferiores a $2\pi a \simeq 1.8 \text{ cm}$. As ondas de gravidade na água de uma bacia ou no lavatório são, essencialmente, dominadas pela tensão superficial — sendo designadas por ondas gravitocapilares.

Generalização para profundidade arbitrária

Neste caso, temos de considerar as duas componentes da velocidade da água, pelo que a equação de movimento fica:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nabla p + \rho \vec{g} = -\nabla (p - p_a + \rho g z) \quad (13)$$

No segundo membro, incluímos, por comodidade, a pressão atmosférica, constante; e vemos que, sendo este segundo membro um gradiente, então também se terá:

$$\vec{v} = \nabla \varphi \quad (14)$$

Esta função φ é designada por potencial velocidade. Assim, substituindo na equação 13, tem-se:

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -(p - p_a) - \rho g z \quad (15)$$

A incompressibilidade assumida para a água traduz-se por:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta \varphi = 0 \quad (16)$$

Procuremos, agora, soluções em que, à superfície da água, se tenha um deslocamento tal como na equação 5. Será, então, de esperar que o potencial velocidade apresente a mesma dependência no tempo e na coordenada x , *i.e.*, da forma:

$$\varphi = \text{Re} \left[\hat{f}(z) e^{ik_x x - i\omega t} \right] \quad (17)$$

Substituindo na equação 16, obtém-se:

$$\frac{d^2 \hat{f}}{dz^2} - k_x^2 \hat{f} = 0$$

A solução geral desta equação é uma combinação linear de seno e co-seno hiperbólicos. Ora, sabemos que, no leito da água ($z = -H$) deve ser $v_z = 0$, *i.e.*,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=-H} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial z} \right)_{z=-H} = 0$$

Assim, a solução procurada é:

$$\hat{f} = \hat{f}_0 \text{ch}(k_x(z + H)) \quad (18)$$

Na superfície livre da água ($z = \zeta$), tem-se:

$$v_z(x, \zeta, t) = \dot{\zeta} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=\zeta} = \dot{\zeta} \quad (19)$$

Usando as equações 5, 17 e 18, e aceitando ser $\zeta \ll H$, obtém-se:

$$k_x \hat{f}_0 sh(k_x H) = -i\omega \hat{\zeta}_0$$

E, da equação 15, tira-se:

$$-i\omega \hat{f}_0 ch(k_x H) = -g \hat{\zeta}_0$$

Estas duas equações fornecem a relação de dispersão:

$$\omega^2 = gk_x th(k_x H) \quad (20)$$

Vemos, aqui, outro exemplo de uma relação não linear entre a frequência angular e o vetor de onda, originando dispersão das ondas com diferentes frequências. E vemos que a solução antes estudada é um caso particular desta: ondas longas em águas rasas significa, apenas, $k_x H \ll 1$.

Tem interesse estudar com algum detalhe o campo de velocidades. Admitindo, para simplificar, que $\hat{\zeta}_0$ é real, deduz-se das equações 14 e 17:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{gk_x \zeta_0}{\omega} \frac{ch(k_x(z+H))}{ch(k_x H)} \cos(k_x x - \omega t)$$

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{gk_x \zeta_0}{\omega} \frac{sh(k_x(z+H))}{ch(k_x H)} \sin(k_x x - \omega t)$$

Consideremos a vizinhança de um ponto (x_0, z_0) no interior da água, podendo, assim, substituir estes valores nos segundos membros das equações acima. Para uma "partícula" de água nesta vizinhança, a sua trajetória é definida por:

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x_0, z_0, t) = \frac{gk_x \zeta_0}{\omega} \frac{ch(k_x(z_0+H))}{ch(k_x H)} \cos(k_x x_0 - \omega t)$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z(x_0, z_0, t) = \frac{gk_x \zeta_0}{\omega} \frac{sh(k_x(z_0+H))}{ch(k_x H)} \sin(k_x x_0 - \omega t)$$

Assim, por simples integração, obtém-se a trajetória:

$$x(t) - x_0 = -\frac{gk_x}{\omega^2} \zeta_0 \frac{ch(k_x(z_0+H))}{ch(k_x H)} \sin(k_x x_0 - \omega t)$$

$$\text{Então: } z(t) - z_0 = \frac{gk_x}{\omega^2} \zeta_0 \frac{sh(k_x(z_0+H))}{ch(k_x H)} \cos(k_x x_0 - \omega t)$$

$$\left(\frac{x(t) - x_0}{\zeta_0 ch(k_x(z_0+H))} \right)^2 + \left(\frac{z(t) - z_0}{\zeta_0 sh(k_x(z_0+H))} \right)^2 = \left(\frac{gk_x}{\omega^2 ch(k_x H)} \right)^2$$

As trajetórias são elipses, alongadas na direção de progressão da onda à superfície (eixo x) e o eixo menor é tanto mais pequeno quanto maior a profundidade (z_0 mais negativo),

anulando-se no leito da água (FIGURA 3). À superfície, onde esta ondulação é mais forte, ela é bem sentida por quem boiar, no mar, longe da zona de rebentação.

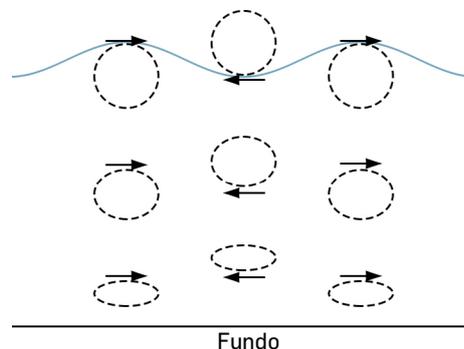


FIGURA 3. Trajetórias das partículas e sua variação com a profundidade. A linha azul representa a progressão da onda à superfície.

Nota final

O ar, acima da água, apenas serviu, no exposto, para fixar a pressão atmosférica. Contudo, a situação é bem mais interessante: as vibrações da onda de gravidade na superfície induzem ondas sonoras no ar. Para uma onda de gravidade plana e monocromática, como as que consideramos, a frequência angular ω e o vetor de onda k_x impõem o padrão espaçotemporal das vibrações à superfície, exigindo esses valores para a onda sonora. Porém, esta propaga-se segundo x e z : assim, a onda sonora é representada por $e^{-i\omega t + ik_x x + ik_z z}$ e tem a relação de dispersão $\omega^2 = c_s^2 (k_x^2 + k_z^2)$, onde c_s é a velocidade do som, da ordem de 340m/ s.

Ora, com $\omega = c_0 k_x$ para a onda de gravidade, então deduzimos que $k_z^2 = \omega^2 \left(\frac{1}{c_s^2} - \frac{1}{c_0^2} \right)$.

Habitualmente, é $c_s > c_0$, pelo que k_z é imaginário: a onda sonora amortece à medida que se afasta da superfície de separação. Na situação oposta, $c_s < c_0$, a onda sonora propaga-se sem amortecimento, transportando energia das vibrações na superfície: agora, é a onda de gravidade que experimenta atenuação! Não prosseguiremos esta interessante análise.

Notas

^{a)} Não confundir com as ondas gravitacionais da Relatividade Geral

^{b)} Podia adicionar-se a (15) uma constante que só poderia depender do tempo, mas tal não tem importância porque só as derivadas espaciais têm significado físico: são as componentes da velocidade

REFERÊNCIAS

¹ LAGE, E. *Ondas*, Rev. Ciência Elem., V8(1):016. (2020). DOI: [10.24927/rce2020.016](https://doi.org/10.24927/rce2020.016).

² LAGE, E. *Mecânica dos Fluidos*, Rev. Ciência Elem., V6(4):084. (2018). DOI: [10.24927/rce2018.084](https://doi.org/10.24927/rce2018.084).

³ LAGE, E. *Fluidos*, Rev. Ciência Elem., V6(4):071. (2018). DOI: [10.24927/rce2018.071](https://doi.org/10.24927/rce2018.071).