

Propriedades óticas de cristais anisotrópicos.

CATEGORIA

Artigo

Eduardo Lage

U. Porto

CITAÇÃO

Lage, E. (2023)

Propriedades óticas de cristais anisotrópicos,

Rev. Ciência Elem., V11(01):014.

doi.org/10.24927/rce2023.014

EDITOR

João Nuno Tavares

Universidade do Porto

EDITOR CONVIDADO

Jorge Manuel Canhoto

Universidade de Coimbra

RECEBIDO EM

26 de abril de 2022

ACEITE EM

14 de junho de 2022

PUBLICADO EM

15 de março de 2023

COPYRIGHT

© Casa das Ciências 2023.

Este artigo é de acesso livre, distribuído sob licença Creative Commons com a designação [CC-BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/), que permite a utilização e a partilha para fins não comerciais, desde que citado o autor e a fonte original do artigo.

rce.casadasciencias.org



Nos cristais eletricamente anisotrópicos, a propagação de ondas eletromagnéticas apresenta comportamentos diferentes dos manifestados em meios isotrópicos. A anisotropia origina, para cada direção de propagação da onda, dois vetores de onda diferentes, com polarizações ortogonais para o deslocamento elétrico. O campo elétrico não é, em geral, colinear com o deslocamento elétrico, daí resultando que os vetores de Poynting para aquelas ondas não são colineares com a direção de propagação da onda. Os vetores de onda definem uma superfície de duas folhas que se mostra ser dual da superfície dos raios associada com a propagação da energia, permitindo uma interpretação geométrica das propriedades óticas destes cristais. Os fenómenos de birrefringência, observado primeiramente por R. Bartholin (1669) e explicado por C. Huygens (1690), e as refrações cónicas interna e externa previstas por W. R. Hamilton (1832), são fenómenos espetaculares mas integralmente descritos pela teoria de Maxwell do campo eletromagnético como é mostrado neste trabalho.

Os meios isotrópicos (gases, líquidos, cristais do sistema cúbico) apresentam um comportamento relativamente simples para a propagação de ondas planas e monocromáticas¹. A isotropia do meio manifesta-se na relação de dispersão² onde não intervém a direção de propagação da onda e esta direção é, também, a da propagação da energia. As propriedades óticas do meio são determinadas pelo seu índice de refração e pelos dois estados de polarização¹ que podem ser escolhidos arbitrariamente no plano perpendicular ao vetor de onda.

Nos meios anisotrópicos, de que vários exemplos são dados adiante, a relação ente o deslocamento elétrico, \vec{D} , e o campo elétrico, \vec{E} , é tensorial³ – num qualquer sistema de eixos trirretangular, essa relação escreve-se^a:

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon'_{ij} E_j \quad (1)$$

Admite-se aqui que o tensor permitividade elétrica relativa, ε'_{ij} , é simétrico pelo que é sempre diagonalizável. As suas direções próprias são ortogonais e definem o sistema de eixos dielétricos x_1, x_2, x_3 . Os correspondentes valores próprios $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3)$, determinam o comportamento ótico:

meios isotrópicos $\varepsilon'_1 = \varepsilon'_2 = \varepsilon'_3$

cristais uniaxiais $\varepsilon'_1 = \varepsilon'_2 \neq \varepsilon'_3$

cristais biaxiais $\varepsilon'_1 < \varepsilon'_2 < \varepsilon'_3$

Designam-se por índices de refração principais as raízes quadradas destes valores próprios. Deve sublinhar-se que as direções próprias são, muitas vezes, coincidentes com eixos cristalográficos e que os valores próprios dependem, em geral, da frequência da onda eletromagnética. Notar-se-á, também, que nos cristais anisotrópicos, os vetores \vec{D} e \vec{E} não são, em geral, colineares, fazendo um ângulo agudo entre eles porque a densidade de energia elétrica $\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$ é sempre positiva. No entanto, aqueles vetores são colineares nos eixos dielétricos e, também, noutras direções no caso de haver degenerescência dos valores próprios.

No que se segue, e para facilitar a notação, redefine-se $\frac{\vec{D}}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{D}$ e abandona-se a plica no tensor permitividade elétrica relativa. Assim, para uma onda eletromagnética plana (vetor de onda \vec{k}) e monocromática (frequência angular ω), as equações de Maxwell dão:

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B} \quad (2)$$

$$\vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{D} \quad (3)$$

Segue-se que os vetores $\vec{D}, \vec{B}, \vec{k}$ formam um triedro direto. O vetor de Poynting:

$$\vec{S} = \epsilon_0 c^2 \vec{E} \wedge \vec{B} \quad (4)$$

que determina a direção da propagação da energia eletromagnética, situa-se, tal como $\vec{D}, \vec{E}, \vec{k}$, num plano perpendicular ao campo magnético, \vec{B} (FIGURA 1).

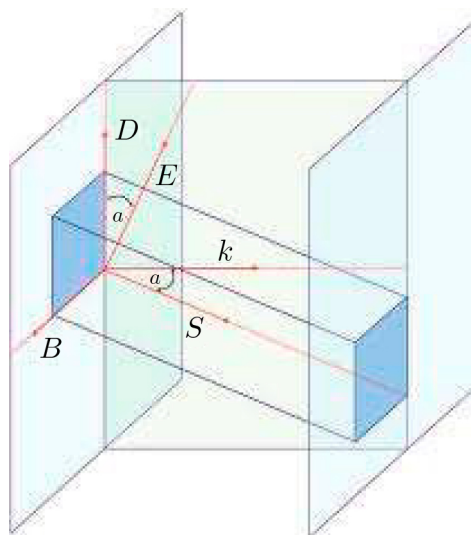


FIGURA 1. Identificação dos diversos campos da onda eletromagnética.

Note-se que o ângulo entre os vetores \vec{D}, \vec{E} é igual ao ângulo entre os vetores \vec{k}, \vec{S} . A maior parte das propriedades óticas dos cristais anisotrópicos reside neste não alinhamento entre a direção de propagação da onda e a direção de propagação da energia.

Eliminando o campo magnético nas equações (2) e (3), obtém-se:

$$\vec{k}^2 \vec{E} - (\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k} = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{D} \quad (5)$$

Esta equação vai fornecer a relação de dispersão. Para isso, considere-se um sistema de eixos trirretangular x, y, z com o eixo z alinhado na direção do vetor de onda e os eixos x, y escolhidos arbitrariamente no plano perpendicular ao vetor de onda. Como é $D_z = 0$, da equação (1) tira-se $E_z = -\frac{1}{\varepsilon_{zz}}(\varepsilon_{zx}E_x + \varepsilon_{zy}E_y)$ que se substitui na equação (5) projetada no plano x, y , obtendo-se a seguinte equação sob forma matricial:

$$\frac{c^2}{\omega^2}k^2 \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} - \frac{\varepsilon_{xz}}{\varepsilon_{zz}} & \varepsilon_{xy} - \frac{\varepsilon_{xz}\varepsilon_{zy}}{\varepsilon_{zz}} \\ \varepsilon_{yx} - \frac{\varepsilon_{yz}\varepsilon_{zx}}{\varepsilon_{zz}} & \varepsilon_{yy} - \frac{\varepsilon_{yz}\varepsilon_{zy}}{\varepsilon_{zz}} \end{bmatrix}$$

É uma equação de valores próprios onde a matriz no segundo membro é simétrica. A equação secular (equação de Fresnel) define então, dois valores próprios k^2 , distintos em geral, sendo ortogonais os respetivos vetores próprios $\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$. Note-se que tal não significa que os correspondentes vetores \vec{E} sejam ortogonais (para os quais existem, também, as componente E_z). Na verdade, o segundo membro da equação anterior define as componentes $\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix}$ do deslocamento elétrico, sendo, pois, os verdadeiros vetores próprios daquela equação^b. Assim, para uma direção arbitrária de propagação, há, em geral, duas ondas com a mesma frequência que se propagam naquela direção (i.e. $k > 0$) com diferentes vetores de onda, apresentando, pois, diferentes índices de refração, η (recorda-se¹ que $k = \frac{\omega}{c}\eta$), com polarizações \vec{D} retilíneas perpendiculares entre si e à direção de propagação, sendo também diferentes os respetivos vetores de Poynting. Há casos em que aqueles dois valores próprios são iguais, e.g., por razões de simetria nos cristais uniaxiais ou para direções particulares (binormais) nos cristais biaxiais, como se mostra adiante. Nestes casos, a ortogonalidade das polarizações pode sempre ser imposta.

Tem particular interesse projetar a equação (5) nos eixos dielétricos onde a matriz $[\varepsilon]$ está diagonalizada. Obtém-se:

$$\begin{bmatrix} k^2 - k_1^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1 & -k_1k_2 & -k_1k_3 \\ -k_1k_2 & k^2 - k_2^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2 & -k_2k_3 \\ -k_1k_3 & -k_2k_3 & k^2 - k_3^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (6)$$

A matriz é simétrica; o necessário anulamento do seu determinante dá a relação de dispersão para qualquer direção, o que será apresentado mais abaixo. Genericamente, o determinante é uma função $F(\vec{k}, \omega, [\varepsilon])$ e o seu anulamento:

$$F(\vec{k}, \omega, [\varepsilon]) = 0 \quad (7)$$

define uma superfície no espaço dos vetores de onda. É, realmente, uma superfície de duas folhas que se tocam em alguns pontos, como se verifica a seguir, designada por superfície dos vetores de onda. A normal a esta superfície é determinada pelo seu gradiente (em relação às componentes de k), i.e., $\nabla_{\vec{k}} F$. Ora, diferenciando a função para as variáveis \vec{k} e ω , tem-se:

$$\nabla_{\vec{k}} F \cdot d\vec{k} + \frac{\partial F}{\partial \omega} d\omega = 0 \rightarrow \vec{v}_g = \frac{d\omega}{d\vec{k}} = -\frac{\nabla_{\vec{k}} F}{\frac{\partial F}{\partial \omega}} \quad (8)$$

onde \vec{v}_g é a velocidade de grupo², pelo que esta é normal à superfície dos vetores de onda. A explicitação da função F torna-se mais simples se se começar por definir um vetor $\vec{\eta}$, adimensional, da seguinte forma:

$$\vec{k} \equiv \frac{\omega}{c} \vec{\eta} \quad (9)$$

Então, a relação de dispersão $F = 0$ dá a equação de Fresnel:

$$\begin{aligned} \eta^2 [\eta_1^2 \varepsilon_1 + \eta_2^2 \varepsilon_2 + \eta_3^2 \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_3 \varepsilon_1] + \\ + \eta_1^2 \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \eta_2^2 \varepsilon_3 \varepsilon_1 + \eta_3^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Para uma direção arbitrária do vetor de onda definida pelo versor \vec{u} , i.e., $\vec{\eta} = \eta \vec{u}$, esta equação pode ser escrita mais sucintamente sob a forma:

$$\frac{\varepsilon_1 u_1^2}{\eta^2 - \varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_2 u_2^2}{\eta^2 - \varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_3 u_3^2}{\eta^2 - \varepsilon_3} = 0 \quad (11)$$

Existem, pois, dois índices de refração, η , para as duas ondas que se propagam naquela direção, confirmando o resultado atrás obtido, situados entre o maior e menor dos índices de refração principais (como se observa se se representar graficamente a equação (11)). A equação (10) mostra claramente que a superfície dos vetores de onda é uma superfície de duas folhas. O estudo mais atento desta superfície é apresentado mais abaixo.

Os estados de polarização \vec{D} para as duas ondas são mais facilmente deduzido a partir do elipsoide dos índices que agora se descreve. Considere-se a energia eletrostática:

$$U_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \left(\frac{D_1^2}{\varepsilon_1} + \frac{D_2^2}{\varepsilon_2} + \frac{D_3^2}{\varepsilon_3} \right)$$

O elipsoide dos índices é definido por:

$$\frac{\eta_1^2}{\varepsilon_1} + \frac{\eta_2^2}{\varepsilon_2} + \frac{\eta_3^2}{\varepsilon_3} = 1 \quad (12)$$

Para encontrar as polarizações das duas ondas que se propagam numa direção arbitrária \vec{u} , encontra-se a interseção do plano normal a \vec{u} passando pela origem do elipsóide. A interseção é uma elipse, em geral, cujos semieixos são os dois índices de refração (assinalados por η_a e η_b na figura onde, também, se marcaram, nos eixos, os índices de refração principais) e também definem as duas direções de polarização (FIGURA 2). A demonstração deste resultado é apresentada no Apêndice.

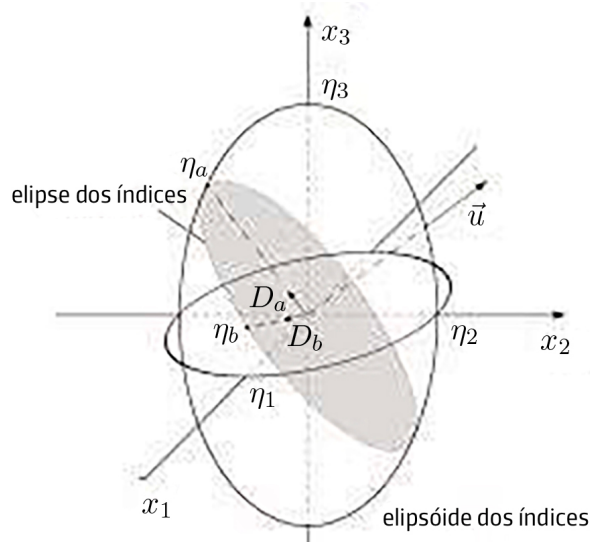


FIGURA 2. O elipsóide dos índices.

Usando a equação (9), as equações (2) e (3) reescrevem-se sob a forma:

$$\vec{\eta} \wedge \vec{E} = c\vec{B} \quad (13)$$

$$c\vec{B} \wedge \vec{\eta} = \vec{D} \quad (14)$$

$$D_i = \varepsilon_{ij}E_j \quad (15)$$

Um raio de luz é, realmente, um grupo de ondas com a mesma frequência, e vetores de onda distribuídos em torno de um vetor de onda \vec{k} central. Sendo um grupo de ondas, move-se com a velocidade de grupo a qual se mostrou ser normal à superfície dos vetores de onda. É, assim, de esperar que o vetor de Poynting, que exprime o transporte de energia do grupo, seja normal àquela superfície. Mas pode ser provada esta afirmação. Sejam \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} os vetores do campo associados com a onda central. Para as outras ondas do grupo, haverá diferenças $\delta\vec{E}$, $\delta\vec{D}$, $\delta\vec{B}$ em relação àqueles vetores. Diferenciando as equações (13) e (14), tem-se:

$$c\delta\vec{B} = \delta\vec{\eta} \wedge \vec{E} + \vec{\eta} \wedge \delta\vec{E}$$

$$\delta\vec{D} = c\delta\vec{B} \wedge \vec{\eta} + c\vec{B} \wedge \delta\vec{\eta}$$

Então:

$$c\delta\vec{B} \cdot \vec{B} = \delta\vec{\eta} \wedge \vec{E} \cdot \vec{B} + \vec{\eta} \wedge \delta\vec{E} \cdot \vec{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \delta\vec{\eta} \cdot \vec{S} + \delta\vec{E} \cdot \vec{B} \wedge \vec{\eta} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \delta\vec{\eta} \cdot \vec{S} + \frac{1}{c} \delta\vec{E} \cdot \vec{D}$$

$$\frac{1}{c} \delta\vec{D} \cdot \vec{E} = \delta\vec{B} \wedge \vec{\eta} \cdot \vec{E} + \vec{B} \wedge \delta\vec{\eta} \cdot \vec{E} = \vec{\eta} \wedge \vec{E} \cdot \delta\vec{B} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \delta\vec{\eta} \cdot \vec{S} = c\delta\vec{B} \cdot \vec{B} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \delta\vec{\eta} \cdot \vec{S}$$

Ora, $\delta\vec{E} \cdot \vec{D} = \delta E_i D_i = \delta E_i \varepsilon_{ij} E_j = \delta E_j \varepsilon_{ji} E_i = E_i \varepsilon_{ij} \delta E_j = \vec{E} \cdot \delta\vec{D}$. Deste modo, as equações anteriores determinam $\delta\vec{\eta} \cdot \vec{S} = 0$, confirmando ser o vetor de Poynting normal à superfície dos vetores de onda.

Considere-se um vetor \vec{s} , colinear com o vetor de Poynting, \vec{S} , e satisfazendo a relação:

$$\vec{s} \cdot \vec{\eta} = 1 \quad (16)$$

Quando o vetor de onda se desloca na superfície dos vetores de onda, este vetor \vec{s} , normal à superfície, define uma outra superfície, designada por superfície dos raios, que importa agora descrever. Note-se que tal vetor, tal como \vec{S} , é perpendicular aos vetores \vec{E} e \vec{B} (equação (4)). Assim, multiplicando vetorialmente por \vec{s} as equações (13) e (14), e usando a equação (16), obtém-se:

$$\vec{s} \wedge \vec{D} = c\vec{B} \quad (17)$$

$$c\vec{B} \wedge \vec{s} = \vec{E} \quad (18)$$

$$E_i = [\varepsilon]_{ij}^{-1} D_j \quad (19)$$

onde $[\varepsilon]^{-1}$ é a matriz inversa da matriz das permitividades elétricas. Estas equações são duais das equações (13)-(15): se nestas se substituir $\vec{\eta} \rightarrow \vec{s}$, $\vec{E} \rightarrow \vec{D}$, $\vec{D} \rightarrow \vec{E}$ e $[\varepsilon] \rightarrow [\varepsilon]^{-1}$, obtém-se as equações (17) a (19) (\vec{B} é invariante). Deste modo, se uma equação for obtida envolvendo as primeiras grandezas, a mesma equação será válida para as segundas grandezas, bastando efetuar a correspondente substituição. Ora, sendo $F(\vec{\eta}, [\varepsilon]) = 0$, a equação da superfície dos vetores de onda (equação (10)), então $F(\vec{s}, [\varepsilon]^{-1}) = 0$ é a equação da superfície dos raios. E tal como \vec{s} é normal à superfície dos vetores de onda, é $\vec{\eta}$ normal à superfície dos raios. Este resultado pode ser confirmado facilmente: imagine-se que se efetua um pequeno deslocamento $\delta\vec{\eta}$ tangente à superfície dos vetores de onda. Como \vec{s} é normal a esta superfície, então $\delta\vec{\eta} \cdot \vec{s} = 0$. Ora, da equação (16) resulta $\delta\vec{s} \cdot \vec{\eta} = 0$, i.e., o vetor de onda é normal ao correspondente pequeno deslocamento na superfície dos raios.

Cristais uniaxiais.

A tabela apresenta vários exemplos de cristais uniaxiais e indica os sistemas cristalográficos onde podem ocorrer. Nestes sistemas há um eixo de simetria de maior grau que se identifica, por convenção, com o eixo x_3 dos eixos dielétricos, ficando os outros dois arbitrariamente escolhidos no plano perpendicular. Aquele eixo é designado por eixo ótico, sendo habitual definir $\varepsilon_{\parallel} \equiv \varepsilon_3$ e $\varepsilon_{\perp} \equiv \varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Embora o índice de refração dependa da direção de propagação, é costume designar os seus valores extremos por $\eta_e = \sqrt{\varepsilon_{\parallel}}$ (índice extraordinário) e $\eta_o = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$ (índice ordinário), dizendo-se que o cristal é opticamente positivo/negativo se $\Delta\eta \equiv \eta_e - \eta_o$ for maior/menor do que zero.

Uniaxial crystals, at 590 nm

Material	Crystal system	n_o	n_e	Δn
barium borate BaB_2O_4	Trigonal	1.6776	1.5534	-0.1242
beryl $Be_3Al_2(SiO_3)_6$	Hexagonal	1.602	1.557	-0.045
calcite $CaCO_3$	Trigonal	1.658	1.486	-0.172
ice H_2O	Hexagonal	1.3090	1.3104	+0.0014
lithium niobate $LiNbO_3$	Trigonal	2.272	2.187	-0.085
magnesium fluoride MgF_2	Tetragonal	1.380	1.385	+0.006
quartz SiO_2	Trigonal	1.544	1.553	+0.009
ruby Al_2O_3	Trigonal	1.770	1.762	-0.008
rutile TiO_2	Tetragonal	2.616	2.903	+0.287
sapphire Al_2O_3	Trigonal	1.768	1.760	-0.008
silicon carbide SiC	Hexagonal	2.647	2.693	+0.046
tourmaline (complex silicate)	Trigonal	1.669	1.638	-0.031
zircon, high $ZrSiO_4$	Tetragonal	1.960	2.015	+0.055
zircon, low $ZrSiO_4$	Tetragonal	1.920	1.967	+0.047

A superfície dos vetores de onda é constituída por uma esfera e por um elipsoide de revolução (FIGURA 3), em torno do eixo ótico, com as duas folhas a tocarem-se apenas no eixo ótico:

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = \varepsilon_{\perp} \quad (20)$$

$$\frac{\eta_1^2 + \eta_2^2}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{\eta_3^2}{\varepsilon_{\perp}} = 1$$

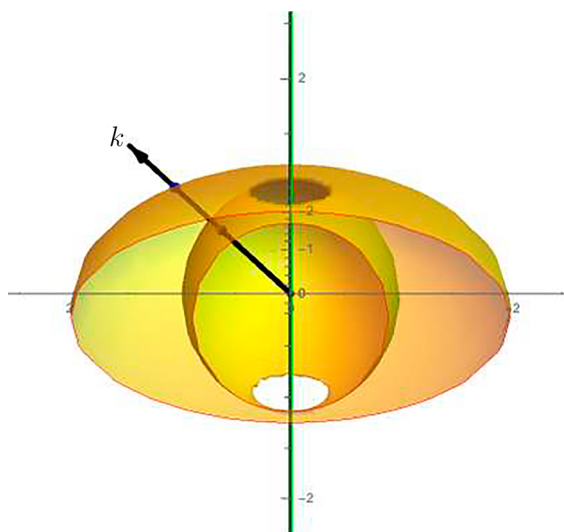


FIGURA 3. A superfície dos vetores de onda para um cristal uniaxial.

A primeira folha descreve a onda “ordinária” para a qual \vec{D} e \vec{E} são colineares e perpendiculares ao eixo ótico originando um vetor de Poynting colinear com o vetor de onda. A segunda folha descreve a onda “extraordinária”: o vetor \vec{D} situa-se no plano definido pelo eixo ótico e o vetor de onda respetivo (plano principal), não sendo colinear com \vec{E} , pelo que o vetor de Poynting, perpendicular ao elipsoide, não tem a direção do vetor de onda. O elipsoide dos índices é, também, de revolução em torno do eixo ótico e confirma estas conclusões. Assim, para luz propagando-se numa direção genérica, haverá dois raios divergentes, cada um polarizado linearmente e com polarizações perpendiculares (FIGURA 4), tal como se observa num cristal de calcite (FIGURA 5).

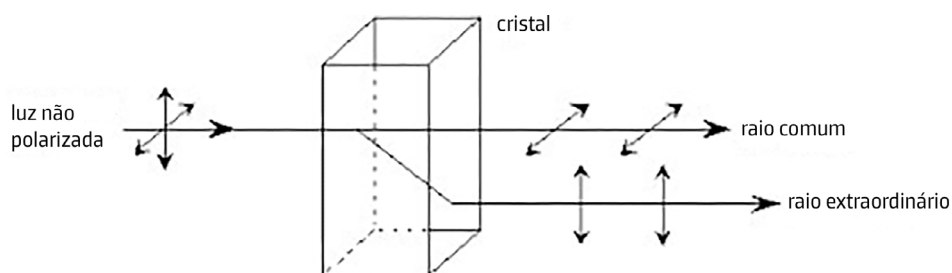


FIGURA 4. Refração dupla num cristal uniaxial.



FIGURA 5. Birrefringência num cristal de calcite.

Rodando o cristal, obter-se-á um único raio quando o vetor de onda, no interior do cristal, se alinhar com o eixo ótico.

Exemplo

A FIGURA 6 representa a interface (eixo x) de vácuo ou ar com um cristal uniaxial. O eixo ótico, x_3 , situa-se no plano de incidência, fazendo um ângulo α com a normal (eixo z) à interface. A interseção da superfície dos vetores de onda com o plano de incidência consiste na semicircunferência de raio $\sqrt{\varepsilon_{\perp}}$ e no arco de elipse de semieixos $\sqrt{\varepsilon_{\perp}}$ e $\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}$, ambos desenhados (amarelo) na figura. Uma onda plana monocromática apresenta uma incidência normal à interface (vetor de onda $k^{(i)}$ dirigido segundo z). Pretende-se descrever as ondas refletida e transmitida.

Notar-se-á que a fase da onda incidente depende apenas do tempo no plano de separação, pelo que as ondas refletida e transmitida têm a mesma frequência e vetores de onda perpendiculares à interface¹. Para a polarização perpendicular da onda incidente, a onda transmitida também em polarização perpendicular (a polarização é normal ao eixo ótico): é o raio ordinário, apresentando índice de refração o $\eta_o = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$ e tendo o respetivo vetor de Poynting dirigido segundo o eixo z .

$\eta_3 = \eta^{(t)} \cos \alpha$ no ponto considerado. Passando para os eixos x, z , esta normal tem componentes $\left(-\text{sen} \alpha \cos \alpha \left(\frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} - \frac{1}{\varepsilon_{\perp}}\right), \frac{(\text{sen} \alpha)^2}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{(\cos \alpha)^2}{\varepsilon_{\perp}}\right)$, pelo que:

$$\text{tg} \beta = \eta^{(t)^2} \text{sen} \alpha \cos \alpha \left(\frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} - \frac{1}{\varepsilon_{\perp}}\right) \quad (22)$$

onde se usou a equação (21). Este ângulo β é a separação angular entre os raios ordinário e extraordinário que se observa nas FIGURA 4 e FIGURA 5.

O vetor $\vec{D}^{(t)}$ tem componentes $-\vec{D}^{(t)} (\cos \alpha, \text{sen} \alpha)$ nos eixos dielétricos, pelo que o campo elétrico da onda transmitida tem componentes $-\vec{D}^{(t)} \left(\frac{\cos \alpha}{\varepsilon_{\perp}}, \frac{\text{sen} \alpha}{\varepsilon_{\parallel}}\right)$. Passando para os eixos x, z , obtém-se $-\vec{D}^{(t)} \left(\frac{(\text{sen} \alpha)^2}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{(\cos \alpha)^2}{\varepsilon_{\perp}}, \text{sen} \alpha \cos \alpha \left(\frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} - \frac{1}{\varepsilon_{\perp}}\right)\right)$. Assim, a continuidade, na interface, das componentes tangenciais do campo elétrico, fica:

$$E^{(i)} - E^{(r)} = D^{(t)} \frac{(\text{sen} \alpha)^2}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{(\cos \alpha)^2}{\varepsilon_{\perp}} = \frac{D^{(t)}}{\eta^{(t)^2}} \quad (23)$$

Os campos magnéticos das três ondas têm a direção e sentido contrário aos eixos $y \equiv x_2$. Para a onda transmitida, o campo magnético obtém-se da equação (14): $cB^{(t)} = \frac{D^{(t)}}{\eta^{(t)}}$. Assim, a continuidade das componentes tangenciais do campo magnético, escreve-se:

$$E^{(i)} + E^{(r)} = \frac{D^{(t)}}{\eta^{(t)}} \quad (24)$$

Das equações (23) e (24) resultam as relações de Fresnel:

$$\frac{D^{(t)}}{E^{(i)}} = \frac{2\eta^{(t)^2}}{\eta^{(t)} + 1} \quad \frac{E^{(r)}}{E^{(i)}} = \frac{\eta^{(t)} - 1}{\eta^{(t)} + 1} \quad (25)$$

Conclui-se que a refletância para esta polarização da onda incidente é:

$$R_{\parallel} = \left(\frac{\eta^{(t)} - 1}{\eta^{(t)} + 1}\right)^2$$

O vetor de Poynting para a onda transmitida deduz-se dos resultados anteriores, apresentando as seguintes componentes x, z :

$$\begin{aligned} \vec{S}_{\parallel}^{(t)} &= \varepsilon_0 c \frac{D^{(t)^2}}{\eta^{(t)}} \left(-\text{sen} \alpha \cos \alpha \left(\frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} - \frac{1}{\varepsilon_{\perp}}\right), \frac{(\text{sen} \alpha)^2}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{(\cos \alpha)^2}{\varepsilon_{\perp}}\right) = \\ &= \varepsilon_0 c \frac{D^{(t)^2}}{\eta^{(t)}} \left(-\text{sen} \alpha \cos \alpha \left(\frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} - \frac{1}{\varepsilon_{\perp}}\right), \frac{1}{\eta^{(t)^2}}\right) \end{aligned}$$

Este resultado confirma que o vetor de Poynting é normal à elipse, como atrás encontrado. A transmitância é definida por:

$$T_{||} = \frac{\left(\vec{S}_{||}^{(t)}\right)_z}{\left(\vec{S}_{||}^{(i)}\right)_z} = \frac{1}{\eta^{(t)^3}} \left(\frac{D^{(t)}}{E^{(i)}}\right) = \frac{4\eta^{(t)}}{(\eta^{(t)} + 1)^2}$$

verificando-se a conservação da energia: $R_{||} + T_{||} = 1$.

Cristais biaxiais.

A tabela apresenta vários exemplos de cristais biaxiais e indica os sistemas cristalográficos onde podem genericamente ocorrer. No sistema triclinico, os eixos dielétricos não estão relacionados com qualquer eixo cristalográfico; no sistema monoclinico, um dos eixos dielétricos, e.g., x_3 , coincide com o eixo de simetria de 2.^a ordem ou é perpendicular ao plano de simetria; no sistema ortorrômbico, os três eixos dielétricos coincidem com os três eixos cristalinos de 2.^a ordem. No que se segue, admite-se a ordenação $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$; estas constantes definem os três índices de refração principais (designados por α, β, γ na tabela).

Biaxial crystals, at 590 nm

Material	Crystal system	n_α	n_β	n_γ
borax $\text{Na}_2(\text{B}_4\text{O}_5)(\text{OH})_4 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$	Monoclinic	1.447	1.469	1.472
epsom salt $\text{MgSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$	Monoclinic	1.433	1.455	1.461
mica, biotite $\text{K}(\text{Mg,Fe})_3(\text{AlSi}_3\text{O}_{10})(\text{F,OH})_2$	Monoclinic	1.595	1.640	1.640
mica, muscovite $\text{KAl}_2(\text{AlSi}_3\text{O}_{10})(\text{F,OH})_2$	Monoclinic	1.563	1.596	1.601
olivine $(\text{Mg,Fe})_2\text{SiO}_4$	Orthorhombic	1.640	1.660	1.680
perovskite CaTiO_3	Orthorhombic	2.300	2.340	2.380
topaz $\text{Al}_2\text{SiO}_4(\text{F,OH})_2$	Orthorhombic	1.618	1.620	1.627
ulexite $\text{NaCaB}_5\text{O}_6(\text{OH})_6 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$	Triclinic	1.490	1.510	1.520

A superfície dos vetores de onda, equação (10), apresenta uma propriedade fundamental para a compreensão do comportamento ótico destes cristais: as duas folhas tocam-se em quatro pontos críticos, apenas, situados no plano x_1x_3 , simetricamente dispostos nos quatro quadrantes, definindo duas retas simétricas em relação ao eixo x_3 . Essas retas são designadas por eixos óticos ou binormais. Com efeito, anulando à vez cada uma das componentes do vetor $\vec{\eta}$ na equação (10), obtém-se a interseção da superfície com os planos dielétricos. A FIGURA 7 representa as linhas obtidas no primeiro octante. Estas linhas são arcos de circunferência ou de elipse que intersectam os eixos segundo os índices de refração principais (marcados na figura).

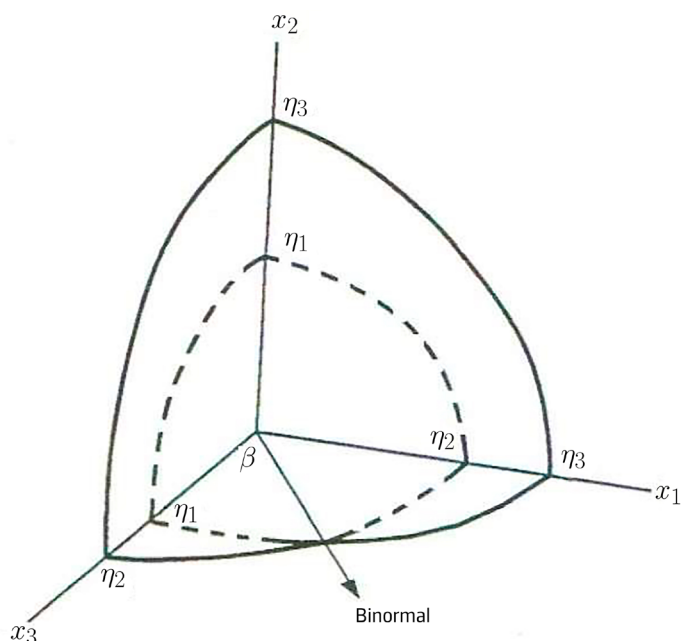


FIGURA 7. Interseções da superfície dos vetores de onda com os planos coordenados dos eixos dielétricos.

As linhas a cheio representam as interseções da folha exterior da superfície; a tracejado representam as interseções com a folha interior. As duas folhas tocam-se num único ponto neste quadrante do plano x_1x_3 , definindo a binormal. Há três outros pontos similares nos outros quadrantes, como se mostra na FIGURA 8.

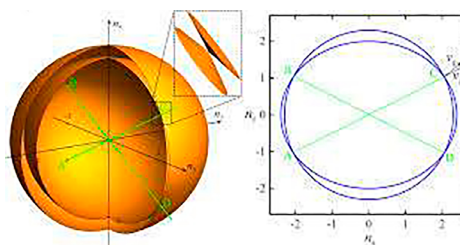


FIGURA 8. Superfície dos vetores de onda onde se assinalam os quatro pontos críticos.

É fácil encontrar as coordenadas deste pontos pois que resultam da interseção da circunferência de raio $\sqrt{\varepsilon_2}$ com a elipse de semieixos $\sqrt{\varepsilon_1}$ e $\sqrt{\varepsilon_3}$, obtendo-se:

$$\eta_1^2 = \varepsilon_3 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1} \quad \eta_3^2 = \varepsilon_1 \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1} \quad (26)$$

Daqui resulta o ângulo β que a binormal faz com o eixo x_3 :

$$\text{tg}\beta = \sqrt{\frac{\varepsilon_3 \varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_2}} \quad (27)$$

Os pontos críticos são pontos especiais: nas suas vizinhanças, as normais à superfície (em número infinito) dispõem-se em cone, como se percebe na FIGURA 8. A interseção deste cone no primeiro quadrante do plano x_1x_3 está definido pelas duas setas vermelhas da FIGURA 9: uma normal ao arco de circunferência (com a direção, pois, da binormal) e a outra normal ao arco de elipse.

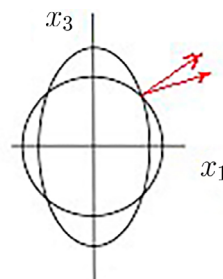


FIGURA 9. As normais (vermelho) à superfície dos vetores de onda no ponto crítico e no plano x_1x_3 .

A importância de um ponto crítico percebe-se se se imaginar que se corta o cristal sob a forma de uma lâmina de faces paralelas e perpendiculares a uma binormal. Efetuando a incidência normal de uma luz natural, de modo que a sua polarização elétrica flutua aleatoriamente no plano perpendicular à direção de propagação, a onda transmitida tem a extremidade do seu vetor de onda no ponto crítico e os raios (vetores de Poynting), normais à superfície dos vetores de onda, distribuem-se em cone — é a refração cônica interna. Na face de saída, obtém-se uma distribuição cilíndrica de radiação paralela à binormal (FIGURA 10).

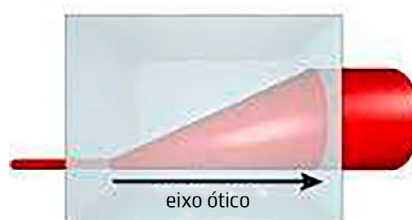


FIGURA 10. Refração cônica interna.

A superfície dos raios, dual da superfície dos vetores de onda, apresenta propriedades similares, exibindo quatro pontos críticos no plano x_1x_3 , definindo duas retas designadas por bi-radiais fazendo um ângulo γ com o eixo x_3 que, por dualidade, se deduz a partir da equação (27):

$$\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}} \operatorname{tg}\beta \quad \rightarrow \quad \gamma < \beta \quad (28)$$

Num ponto crítico da superfície dos raios há uma infinidade de normais dispostas em cone e que são o lugar geométrico dos vetores de onda associados com o mesmo vetor \vec{s} dirigido segundo a bi-radial, com extremidade no ponto crítico, estando um desses vetores de onda alinhado com a bi-radial. Considere-se uma lâmina de faces paralelas do mesmo cristal as quais são perpendiculares à bi-radial. Cobrindo a face de entrada excepto num pequeno círculo onde,

com uma lente, se faz convergir luz de modo que os vetores de onda refractada se situem no referido cone, a radiação no interior do cristal apresenta um único raio que, ao atingir a face de saída, origina um feixe divergente, em cone, da radiação — é a refração cônica externa (FIGURA 11).

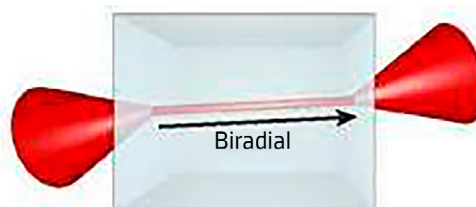


FIGURA 11. Refração cônica externa.

A FIGURA 12 resume a relação entre a superfície dos vetores de onda (azul) e a superfície dos raios (verde) nas suas interseções com o plano x_1x_3 , indicando-se a tracejado as respectivas folhas internas (as escalas são diferentes para as duas superfícies). Desenharam-se a binormal (vermelho) e bi-radial (amarelo).

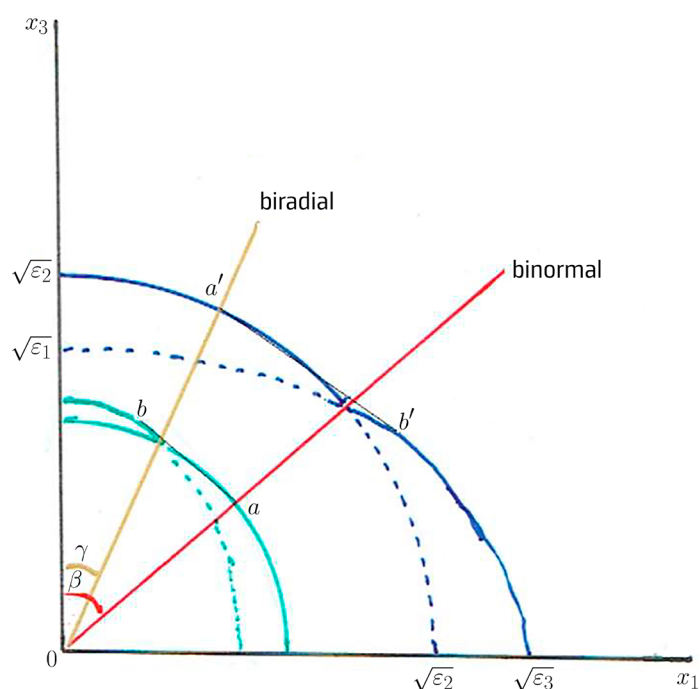


FIGURA 12. Relação entre as superfícies dos vetores de onda e dos raios.

O ponto a é a interseção da binormal com a superfície dos raios. O vetor de onda dirigido segundo a binormal é perpendicular em a à superfície dos raios. O plano tangente a esta superfície em a é também tangente em b , pelo que os raios Oa e Ob estão associados com o mesmo vetor de onda (dirigido segundo a binormal). Assim, Oab é a interseção com o plano da figura do cone de refração cônica interna. De modo análogo, o ponto a' é a interseção da bi-radial com a superfície dos vetores de onda. Como a bi-radial tem a direção de um raio, é normal àquela superfície. Assim, traçando o plano tangente à superfície dos vetores de onda em a' , ele volta a ser tangente a esta superfície em b' . Tal significa que os vetores de onda Oa' e Ob' admitem a mesma normal (o raio dirigido segundo a bi-radial) à superfície dos vetores de onda. Logo, $Oa'b'$ é a interseção com o plano da figura do cone de refração cônica externa.

A birrefringência é usada em ecrãs de cristais líquidos (LCD), em lentes polaroid e em técnicas de diagnóstico em Medicina. O plástico, sob tensão, é birrefringente revelando-se útil em Engenharia Civil para avaliar zonas sob elevada tensão em modelos, à escala reduzida, de pontes e barragens hidroelétricas, uma técnica designada por fotoelasticidade. Em Mineralogia é empregue para identificar rochas, minerais e pedras preciosas. Em Geofísica é utilizado para estudar as ondas-S (transversais) que se propagam apenas na parte sólida da Terra.

Apêndice.

Propriedades do elipsoide dos índices.

O elipsoide dos índices é definido, no sistema de eixos dielétricos, pela equação (12) que aqui se reescreve:

$$\frac{\eta_1^2}{\varepsilon_1} + \frac{\eta_2^2}{\varepsilon_2} + \frac{\eta_3^2}{\varepsilon_3} = \sum_{i=1}^3 \frac{\eta_i^2}{\varepsilon_i} = 1 \quad (29)$$

Seja \vec{u} o versor da direção de propagação de uma onda eletromagnética. O plano normal a \vec{u} passando pelo centro do elipsoide, é dado por:

$$\vec{\eta} \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^3 \eta_i u_i = 0 \quad (30)$$

O plano intersecta o elipsoide segundo uma elipse cujos semi-eixos são determinados pelos extremos da distância à origem, i.e., pelos máximos e mínimos de:

$$\vec{\eta}^2 = \sum_{i=1}^3 \eta_i^2 \quad (31)$$

sujeitos às condições (29) e (30). Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, procurar-se-ão os extremos de:

$$\sum_{i=1}^3 \eta_i^2 - \alpha \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\eta_i^2}{\varepsilon_i} - 1 \right) - 2\beta \sum_{i=1}^3 \eta_i u_i$$

onde α e β são os multiplicadores. Derivando, encontra-se:

$$\eta_i \left(1 - \frac{\alpha}{\varepsilon_i} \right) - \beta u_i = 0 \quad (32)$$

Multiplicando por η_i e somando sobre $i = 1, 2, 3$, obtém-se:

$$\sum_{i=1}^3 \eta_i^2 - \alpha \sum_{i=1}^3 \frac{\eta_i^2}{\varepsilon_i} = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = \sum_{i=1}^3 \eta_i^2 = \eta^2$$

onde se invocou a equação (30). Assim, a equação (32) reescreve-se:

$$\eta_i = \frac{\beta u_i}{1 - \frac{\eta^2}{\varepsilon_i}} = \frac{\beta}{\eta^2} \frac{u_i}{\frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{\varepsilon_i}} \quad (33)$$

Multiplicando por u_i , somando sobre i e atendendo à equação (30), obtém-se:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{u_i^2}{\frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{\varepsilon_i}} = 0$$

que é a equação de Fresnel, equação (11), i.e., as soluções η_a e η_b desta equação são os índices de refração das duas ondas propagando-se na direção de \vec{u} . Usando a equação (33), tem-se:

$$\eta_i^{(a)} \propto \frac{u_i}{\frac{1}{\eta_a^2} - \frac{1}{\varepsilon_i}} \quad \eta_i^{(b)} \propto \frac{u_i}{\frac{1}{\eta_b^2} - \frac{1}{\varepsilon_i}} \quad (34)$$

São, então, estas as direções dos máximo e mínimo da distância à origem. Os dois vetores $\vec{\eta}^{(a)}$ e $\vec{\eta}^{(b)}$ são ortogonais, o que confirma serem os semi-exos da elipse resultante da interseção:

$$\vec{\eta}^{(a)} \cdot \vec{\eta}^{(b)} \propto \sum_{i=1}^3 \frac{u_i^2}{\left(\frac{1}{\eta_a^2} - \frac{1}{\varepsilon_i}\right) \left(\frac{1}{\eta_b^2} - \frac{1}{\varepsilon_i}\right)} \propto \sum_{i=1}^3 u_i^2 \left(\frac{1}{\frac{1}{\eta_a^2} - \frac{1}{\varepsilon_i}} - \frac{1}{\frac{1}{\eta_b^2} - \frac{1}{\varepsilon_i}} \right) = 0$$

como decorre da equação de Fresnel. Estas mesmas direções são as direções da polarização \vec{D} das duas ondas. Com efeito, a equação (5) reescreve-se:

$$\eta^2 E_i - (\vec{u} \cdot \vec{E}) \eta^2 u_i = D_i = \varepsilon_i E_i \quad \rightarrow \quad E_i = \vec{u} \cdot \vec{E} \frac{u_i}{1 - \frac{\varepsilon_i}{\eta^2}}$$

Então:

$$D_i = \varepsilon_i E_i \propto \frac{u_i}{\frac{1}{\varepsilon_i} - \frac{1}{\eta^2}} \quad \rightarrow \quad \vec{D}^{(a)} \parallel \vec{\eta}^{(a)} \quad \vec{D}^{(b)} \parallel \vec{\eta}^{(b)}$$

como resulta por comparação da equação anterior com a equação (34).

Notas

^a Soma sobre índice repetido.

^b Basta multiplicar ambos os membros da equação pela matriz, o que conduz à mesma equação mas com $\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix}$.

^c É mais fácil obter estas equações fazendo $\mathbf{k}_2 = \mathbf{0}$ no anulamento do determinante da eq. (6), completando, depois, os resultados atendendo à simetria de revolução.

REFERÊNCIAS

¹ LAGE, E., *Ondas eletromagnéticas*, Rev. Ciência Elem., V9(2):048. (2021). DOI: [10.24927/rce2021.048](https://doi.org/10.24927/rce2021.048).

² LAGE, E., *Ondas*, Rev. Ciência Elem., V8(1):016. (2021). DOI: [10.24927/rce2021.016](https://doi.org/10.24927/rce2021.016).

³ LAGE, E., *Escalares, vetores e tensores cartesianos*, Rev. Ciência Elem., V6(4):086. (2018). DOI: [10.24927/rce2018.086](https://doi.org/10.24927/rce2018.086).