

O Princípio da Equivalência.

Eduardo Lage

U. Porto

CATEGORIA

Artigo

CITAÇÃO

Lage, E. (2026)

O Princípio da Equivalência,

Rev. Ciência Elem., V14(01):005.

doi.org/10.24927/rce2026.005

EDITOR

João Nuno Tavares

Universidade do Porto

EDITORES CONVIDADOS

Paulo Ribeiro-Claro, Mariela M. Nolasco

Universidade de Aveiro

RECEBIDO EM

13 de novembro de 2025

ACEITE EM

09 de abril de 2026

PUBLICADO EM

15 de março de 2026

COPYRIGHT

© Casa das Ciências 2026.

Este artigo é de acesso livre, distribuído sob licença Creative Commons com a designação [CC-BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/), que permite a utilização e a partilha para fins não comerciais, desde que citado o autor e a fonte original do artigo.

rce.casadasciencias.org



Após a formulação da Teoria da Relatividade Restrita em 1905, Einstein considerou dois problemas: generalizar a teoria a movimentos não uniformes e elaborar uma teoria relativista da gravitação. Em 1907, apercebe-se que estes problemas são um só e apresenta o seu Princípio da Equivalência: um observador acelerado no espaço livre e um observador em repouso num campo gravítico uniforme devem obter os mesmos resultados para qualquer experiência. Aplicou o Princípio para deduzir que relógios em repouso num campo gravítico não sincronizam e estimou o desvio para o vermelho do raio de luz que sobe num campo gravítico e o desvio do raio de luz pelo campo gravitacional do Sol. Apercebe-se que o espaço-tempo não é apenas uma forma conveniente de representar acontecimentos, mas é um “tecido” que se deforma por ação do campo alterando a sua métrica e transformando o efeito da gravidade num problema de geometria onde o intervalo desempenha o papel da métrica na geometria tradicional. A noção de curvatura do espaço-tempo é discutida e exemplificada. O movimento de partículas e raios de luz é brevemente considerado. O Princípio é a base onde assenta a Teoria da Relatividade Geral.



FIGURA 1. Funcionário de classe no gabinete de patentes em Berna (1900-1909).

A Teoria da Relatividade Restrita estabelece a equivalência de todos os observadores em movimento uniforme e retilíneo, baseando-se em dois simples postulados: a covariância das leis da Física (i.e., essas leis têm a mesma forma para tais observadores) e a invariância

da velocidade da luz no vácuo (c). Daqui decorre que a relação entre coordenadas espaciais e tempos do mesmo acontecimento atribuídos por dois observadores é a transformação de Lorentz, originando a noção de espaço-tempo onde cada acontecimento é identificado por $x^\mu = (ct, x, y, z)$ e definindo uma métrica invariante designada por intervalo:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \equiv \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1)$$

Aqui, $\eta_{\mu\nu}$ é o tensor métrico simples com a forma:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \mu = \nu = 0 \\ -1 & \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases}$$

O uso de coordenadas cartesianas na eq. (1) é convencional; poder-se-iam usar coordenadas cilíndricas, esféricas ou outras, com uma correspondente redefinição do tensor métrico, de modo que a última expressão naquela equação é mais geral e tem importância no que se segue.

Da invariância do intervalo resultam dois importantes resultados:

1.º O intervalo é nulo para um raio de luz:

$$ds = 0 \text{ raio de luz} \quad (2)$$

2.º No referencial de uma partícula, o intervalo reduz-se ao seu tempo próprio τ (multiplicado por c), o tempo "marcado" pelo seu relógio.

O tempo próprio permite caracterizar o movimento uniforme e retilíneo da seguinte maneira: uma partícula com tal movimento está, evidentemente, em repouso para um dado observador. Considerando esse observador, a linha de mundo da partícula entre dois instantes $t_A < t_B$ é o segmento entre A e B no eixo $x^0 = ct$ representado (a cheio) na FIGURA 2, tendo-se: $\tau_B - \tau_A = t_B - t_A$. Mas imagine-se uma outra linha de tempo começando em A e terminando em B (a vermelho na figura); para tal linha, o movimento não será retilíneo ou uniforme. O tempo próprio da partícula é:

$$\tau'_B - \tau'_A = \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < t_B - t_A = \tau_B - \tau_A$$

Assim, o movimento uniforme e retilíneo caracteriza-se por dar um máximo ao tempo próprio da partícula:

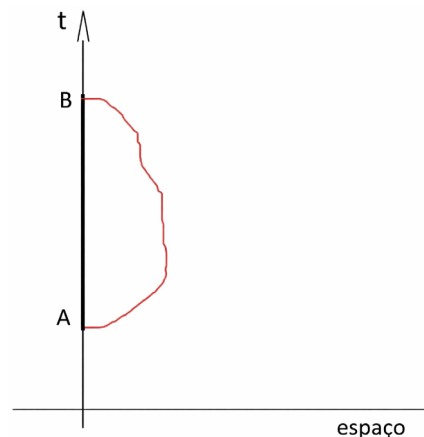


FIGURA 2. Linha de mundo da partícula em repouso (cheio) e para uma linha imaginada (vermelho).

$$\text{movimento uniforme e retilíneo} \Rightarrow \int d\tau \text{ máximo} \quad (3)$$

Este resultado é análogo ao bem conhecido teorema da geometria Cartesiana: de todas as linhas contínuas ligando dois pontos no espaço, o segmento de reta unindo esses pontos dá um mínimo à distância entre esses pontos.

A teoria da Relatividade Restrita não alterou a primeira lei de Newton, conhecido por Princípio da Inércia: uma partícula livre está em repouso ou em movimento uniforme e retilíneo; adaptou a segunda lei de Newton ao Princípio da Relatividade; e descartou a terceira lei de Newton, a lei da ação e reação, porque tal lei assume forças instantâneas à distância, antes fazendo sobressair a noção de campo. Quanto ao Eletromagnetismo, apenas reescreveu as equações de Maxwell sob forma covariante, garantindo, assim, a sua validade para qualquer observador.

Apesar dos seus sucessos, a teoria da Relatividade Restrita não contempla nem o campo gravítico nem movimentos genéricos de observadores, sendo conveniente rever sucintamente como a Mecânica Clássica trata estes problemas.

1.º A lei da atração universal de Newton define a força de gravidade que um corpo exerce sobre outro através de um potencial gravítico φ que satisfaz a equação^b:

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho \quad (4)$$

onde G é a constante de Newton e ρ é a densidade de massa. A massa é, assim, a fonte do campo gravítico; para uma massa pontual m' , o potencial é $\varphi(\vec{r}) = -G\frac{m'}{r}$, originando a intensidade $\vec{g} = -\nabla\varphi = -Gm'\frac{\vec{r}}{r^3}$ que atua sobre uma massa m com a força atrativa $\vec{F} = m\vec{g} = -Gmm'\frac{\vec{r}}{r^3}$ pelo que a aceleração da partícula atuada é $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{g}$, independente da sua massa, como bem verificou Galileu.

2.º O Princípio da Inércia separa os observadores em dois grupos: num, ele é verificado (observadores inerciais) e no outro, ele não é verificado (observadores não inerciais) porque tais observadores se encontram acelerados em relação aos primeiros. A Segunda Lei de Newton é válida para os observadores inerciais (as forças que atuam sobre uma partícula resultam dos campos gravítico ou eletromagnético ou de colisões entre partículas). Contudo, pode relacionar-se a aceleração de uma partícula definida para um observador não inercial com a aceleração da mesma partícula definida para um observador inercial; substituindo esta aceleração por aquela na Lei Fundamental da Dinâmica obtém-se uma expressão em tudo idêntica àquela Lei mas onde, às forças reais atrás referidas, são adicionados termos que se interpretam como novas forças tais como a força centrífuga ou de Coriolis caracterizadas por serem proporcionais à massa da partícula². Estas forças adicionais, colectivamente designadas por forças inerciais, têm, pois, uma origem puramente geométrica: existem para um observador não inercial, não existem para um observador inercial.

Ora, sendo a força da gravidade proporcional à massa da partícula, tal como as forças inerciais, poderá ser eliminada mudando de observador? Isso é possível para um campo gravítico uniforme \vec{g} : um observador em queda livre não tem peso como bem se percebe com astronautas em órbita. Tal observador é realmente um observador inercial: se largar um objeto, este fica em repouso ou animado de um movimento uniforme e retilíneo, satisfazendo a Primeira Lei de Newton.

Inversamente, pode ser criado um campo gravítico uniforme \vec{g} sem existirem forças de atração universal? Se se considerar um observador acelerado uniformemente no espaço livre

com a aceleração $-\vec{g}$, para tal observador (não inercial) qualquer partícula largada livremente está submetida à força inercial $-m(-\vec{g}) = m\vec{g}$ que o observador interpreta como peso.

Um observador situado num campo gravítico uniforme \vec{g} é equivalente a um observador acelerado uniformemente com aceleração $-\vec{g}$. Equivalente significa que os resultados das mesmas experiências são idênticos para esses observadores.

É fundamental sublinhar que existem relógios e réguas universais que funcionam da mesma maneira para qualquer observador que com eles esteja em repouso e na mesma posição – as frequências e os comprimentos de onda da luz emitida ou absorvida por um átomo são os mesmos seja onde for que se situe o observador ou qual o seu estado de movimento. Tal não significa, porém, que os relógios estejam sincronizados ou que réguas sejam comparáveis como já se havia concluído na Teoria da Relatividade Restrita para relógios ou réguas em movimento relativo uniforme e retilíneo.

Com base no Princípio, Einstein fez as previsões que se seguem.

1.^a No campo gravítico uniforme \vec{g} um emissor (E) envia verticalmente um trem de ondas eletromagnéticas de frequência $\nu(0)$ e duração $\delta t(0)$ de modo que $\nu(0)\delta t(0) = n =$ número de nodos. O trem é recebido num detetor (D) à altura H (FIGURA 4). Qual a duração $\delta t(H)$ e frequência $\nu(H)$ do trem recebido, sendo evidentemente $\nu(H)\delta t(H) = n$?

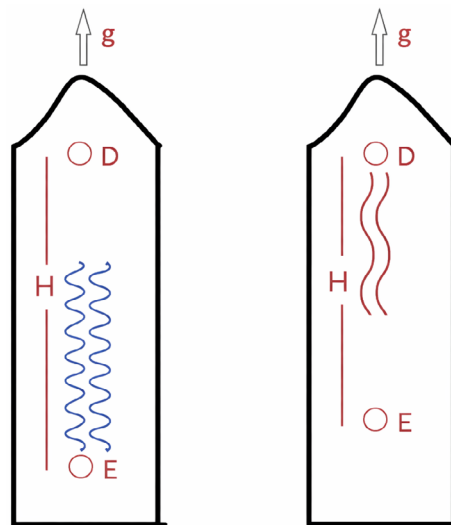


FIGURA 3. O raio de luz é recebido com frequência menor do que quando foi emitido.

Imagine-se um foguetão que acelera ($-\vec{g}$) no espaço livre e que transporta os mesmos emissor e recetor separados pela distância H . O trem de ondas é emitido na base do foguetão com frequência $\nu(0)$ e duração $\delta t(0)$; quando é recebido, já o recetor está em movimento em relação ao emissor no momento da emissão, verificando-se, pois, o efeito Doppler (FIGURA 3).

Durante o tempo de travessia $\frac{H}{c}$ o recetor adquiriu a velocidade $v = \frac{gH}{c}$ pelo que a frequência recebida é:

$$\nu(H) = \nu(0) \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \nu(0) \left(1 - \frac{gH}{c^2}\right) \quad (5)$$

determinando a duração:

$$\delta t(H) = \frac{\delta t(0)}{1 - \frac{gH}{c^2}} \approx \delta t(0) \left(1 + \frac{gH}{c^2}\right)$$

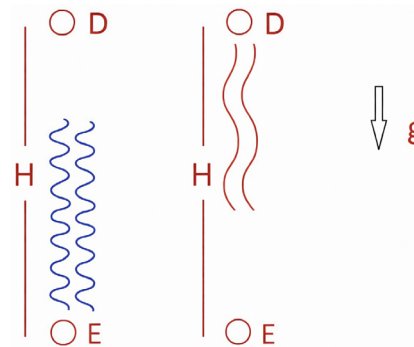


FIGURA 4. Raio de subindo no campo gravítico.

Pelo Princípio da Equivalência, o mesmo se passa no campo gravítico (onde os relógios estão em repouso):

$$\delta t(H) = \delta t(0) \left(1 + \frac{\varphi(H)}{c^2}\right) \quad (6)$$

Aqui, $\varphi(H) = gH$ é o potencial gravítico. Relógios em repouso num campo gravítico uniforme não sincronizam!

É interessante observar que a eq. (5) pode ser deduzida a partir do conceito de fotão e do princípio da conservação da energia. Com efeito, imagine-se um fotão emitido em $z = 0$ com a frequência $\nu(0)$ e que chega a $z = H$ com a frequência $\nu(H)$. A energia do fotão à partida é $h\nu(0)$ onde h é a constante de Planck; à chegada, a sua energia é $h\nu(H) + \frac{h\nu(H)}{c^2}gH$, onde se considera a energia potencial gravítica da massa (não inercial) $\frac{h\nu(H)}{c^2}$. Igualando as duas energias, obtém-se a eq. (5).

Considerem-se dois pontos A e B num campo gravítico. Da eq.(5) resulta:

$$\frac{\nu(A)}{1 - \frac{\varphi(A)}{c^2}} = \frac{\nu(B)}{1 - \frac{\varphi(B)}{c^2}} \Leftrightarrow \lambda(A) \left(1 - \frac{\varphi(A)}{c^2}\right) = \lambda(B) \left(1 - \frac{\varphi(B)}{c^2}\right) \quad (7)$$

onde $\lambda = \frac{c}{\nu}$ é o comprimento de onda.

Aceitando que esta expressão se mantém válida para o campo gravítico do Sol (massa M_s , raio R_s) para o qual o potencial é $\varphi(r) = -G \frac{M_s}{r}$ e escolhendo B na superfície do Sol e A na superfície da Terra^c, obtém-se o desvio para o vermelho das riscas de emissão do Sol:

$$\nu(A) \simeq \frac{\nu(B)}{1 + \frac{GM_s}{Dc^2}} = \frac{\nu(B)}{1 + \frac{r_s}{2D}}$$

onde D é a distância da Terra ao Sol (cerca de 150×10^6 Km) e:

$$r_s \equiv \frac{2GM_s}{c^2} \quad (8)$$

é conhecido por raio de Schwarzschild. Para o Sol, $r_s \approx 3$ Km o que mostra a pequenez do desvio, embora mensurável.

A eq. (5) foi confirmada pela experiência de Pound-Rebka em 1960. No topo de uma torre com altura $H = 22$ m foi colocado um núcleo de Co^{57} radioactivo que se desintegra em Fe^{57} ficando este núcleo num estado excitado (energia E_1) o qual decai para o estado fundamental (energia E_0) emitindo um raio γ com a frequência $\nu = \frac{E_1 - E_0}{h}$ (h é a constante de Planck). O raio chega à base da torre com a frequência $\nu \left(1 + \frac{gH}{c^2}\right) > \frac{E_1 - E_0}{h}$. Na base está um núcleo

de Fe^{57} no estado fundamental, não se verificando absorção porque a energia do fóton é maior que a energia de excitação. Porém, afastando o núcleo do topo com a velocidade $\frac{gH}{c}$, a frequência do fóton para o núcleo em movimento diminui por efeito Doppler $\nu \rightarrow \nu \left(1 - \frac{gH}{c^2}\right)$ verificando-se então absorção do raio γ . A delicadeza da experiência pode ser aferida notando que $\frac{gH}{c^2} \simeq 2,4 \times 10^{-15}$!

2.º Desvio de um raio de luz pelo Sol.

Um foguetão acelera no espaço livre com aceleração \bar{g} . Um raio de luz, perpendicular à aceleração, entra por uma janela e sai pela janela oposta, distante δx (FIGURA 5). Durante o tempo de travessia $\frac{\delta x}{c}$, o foguetão adquiriu a velocidade $g\frac{\delta x}{c}$ pelo que o ponto de saída está abaixo do ponto de entrada. Para o astronauta no foguetão, o raio de luz tem a velocidade c horizontal sobreposta com a velocidade $\frac{\delta x}{c}$ vertical, de modo que se desvia de $\delta\alpha = \frac{g\delta x}{c^2}$.

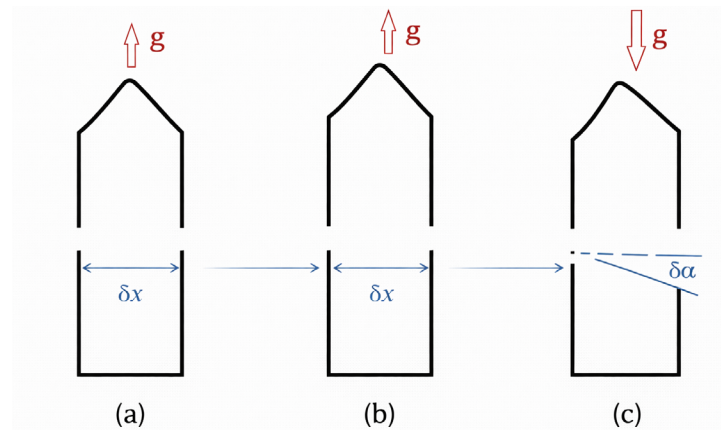


FIGURA 5. Raio de entra por uma janela (a) e sai pela oposta (b); astronauta verifica desvio do raio de (c).

Pelo Princípio da Equivalência, o mesmo deve acontecer num campo gravítico uniforme. Embora o campo do Sol não seja uniforme, pode ser considerado uniforme durante curtos intervalos de tempo em cada um dos quais um raio de luz se desvia da trajetória retilínea, acumulando-se estes desvios num ângulo α que a seguir se determina para um raio tangente à superfície do Sol (FIGURA 6).

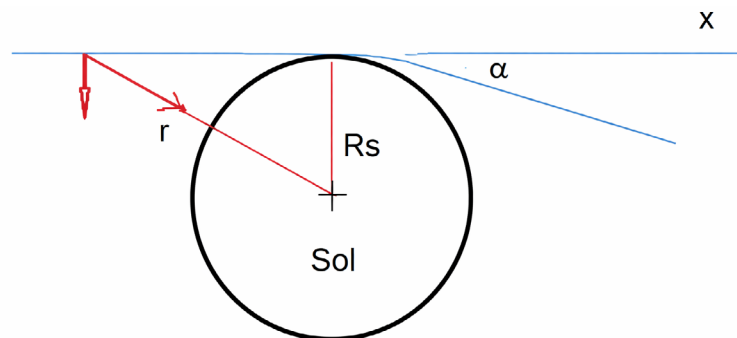


FIGURA 6. Desvio de um raio de luz pelo Sol.

Quando o raio se situa na posição x , à distância $r = \sqrt{R_s^2 + x^2}$ do centro do Sol, a aceleração da gravidade, dirigida para aquele centro, é $\frac{GM_s}{r^2}$. Projetando-a na direção perpendicular

ao eixo x , obtém-se $g = \frac{GM_s}{r^2} \frac{R_s}{r} = \frac{GM_s R_s}{(R_s^2 + x^2)^{3/2}}$, pelo que o ângulo de desvio é $\delta\alpha = \frac{GM_s R_s}{(R_s^2 + x^2)^{3/2}} \frac{\delta x}{c^2}$.

Integrando para todo o x , deduz-se:

$$\alpha = \frac{2GM_s}{c^2 R_s} = \frac{r_s}{R_s} \simeq 0,875'' \quad (9)$$

Este resultado é idêntico ao deduzido por Johann Georg von Soldne, astrónomo alemão, obtido em 1801 usando a Mecânica Newtoniana e a teoria de corpúsculos de luz defendida por Newton. Uma expedição alemã partiu para a Crimeia para observar o eclipse total do Sol de 21 de Agosto de 1914 e verificar a previsão de Einstein (FIGURA 7). Com o início da 1.ª Guerra Mundial em 1 de Agosto daquele ano, os membros da expedição, munidos de telescópios e outros aparelhos ópticos e fotográficos, foram presos como espiões, não tendo feito a observação pretendida, o que deve ser considerado um evento feliz para Einstein porque a teoria da relatividade geral, completada em 1915, prevê exatamente o dobro do valor apresentado na eq. (9), como foi confirmado por A. Eddington em 1919.

A FIGURA 7 ilustra um outro efeito previsto por Irwin Shapiro em 1964: ondas de radar são enviadas da Terra para Vénus onde se reflectem e regressam à Terra. Como a distância entre planetas é bem conhecida, a duração dessa viagem deveria ser a distância entre os dois planetas dividida pela velocidade da luz; mas realmente é maior (cerca de $200 \mu s$) porque a presença do Sol encurva a trajetória do raio de luz, exatamente como foi medido em 1968.



FIGURA 7. Eclipse solar e desvio de raio de luz.

Gravidade e geometria.

Na eq. (6), $t(0)$ é o tempo marcado por um relógio situado ao potencial nulo; é mais útil escrever aquela equação sob a forma:

$$\delta\tau = \delta t \left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right) \quad (10)$$

Aqui, τ refere-se ao tempo marcado por um relógio em repouso num ponto onde o potencial é φ ; por eliminação de δt , obtém-se a relação dos ritmos de dois relógios localizados em pon-

tos diferentes e se um deles estiver ao potencial nulo, então $\tau(0) = t$ como se escrevera na eq. (6). Deste modo, o intervalo relativista da eq. (1) para dois tiques sucessivos de um relógio parado, fica:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 \simeq c^2 \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) dt^2 \quad (11)$$

A variável t , conhecida por coordenada tempo, pode não ter em si mesma qualquer significado físico mas serve para relacionar ritmos de relógios. Todo o significado físico reside no intervalo invariante, o mesmo para todos os observadores, independente do seu estado de movimento ou da escolha de coordenadas que cada um faça. Tal lembra a invariância da distância entre dois pontos. Por exemplo, num plano são bem conhecidas as formas:

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (12)$$

As coordenadas formam grelhas no plano (retas no primeiro caso; semirretas e circunferências no segundo caso). A coordenada ϕ , por si só, não é uma distância, tal como a coordenada t , por si só, não é o tempo marcado por um relógio. Um outro exemplo é a forma para uma esfera (raio R):

$$d\ell^2 = R^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (13)$$

onde, de novo, θ e ϕ , por si só, não são distâncias.

Genericamente, para uma escolha de coordenadas ξ^1, ξ^2 definindo grelhas numa superfície, o elemento de distância ($d\ell$) entre dois pontos muito próximos obtém-se de $d\ell^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j$ onde g_{ij} é o tensor métrico (Ver Apêndice).

Deve então esperar-se, por analogia, que o intervalo no caso geral se escreva:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (14)$$

onde x^μ denota cada uma das coordenadas escolhidas pelo observador e $g_{\mu\nu}$ é um tensor simétrico ainda conhecido por tensor métrico. Para o caso acima tratado, por exemplo, ao longo da linha onde só varia $x^0 = ct$ é $g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$. Um outro importante exemplo que se referirá mais abaixo, é:

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (15)$$

O potencial gravítico newtoniano é substituído pelos 10 termos do tensor métrico determinados como soluções da equação de Einstein (1915), a equação fundamental da Teoria da Relatividade Geral que aqui não será considerada, mas que pode ser lida da seguinte forma: a geometria do espaço-tempo (i.e., $g_{\mu\nu}$) é determinada pela densidade de momentoenergia (quer da matéria quer do campo eletromagnético).

A eq. (15) é a solução com simetria esférica obtida por Schwarzschild (1917) para uma massa estática m e válida no exterior desta massa ou para $r > r_s^*$, conforme o maior. Note-se que, se θ e φ ainda conservam o seu significado habitual, já a distância radial entre dois pontos situados em r_A e r_B , ambos nas condições estipuladas, é $\bar{d} = \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{\sqrt{1 - r_s/r}} > r_B - r_A$.

A escolha de coordenadas determina o que o observador experimenta, tal como em Mecânica Clássica determina se o observador experimenta as forças inerciais. Considere-se um ponto

no espaço-tempo onde se determinam os valores do tensor métrico, $g_{\mu\nu}(0)$. Nas vizinhanças desse ponto é:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(0)dx^\mu dx^\nu$$

O tensor $g_{\mu\nu}(0)$, sendo simétrico, pode ser diagonalizado. Designando por ξ^μ as coordenadas que o diagonalizam, então o intervalo pode escrever-se:

$$ds^2 = g_{00}(0)(d\xi^0)^2 - g_{11}(0)(d\xi^1)^2 - g_{22}(0)(d\xi^2)^2 - g_{33}(0)(d\xi^3)^2$$

onde $g_{00}(0), g_{11}(0), g_{22}(0), g_{33}(0)$ são os valores próprios de $g_{\mu\nu}(0)$. Definam-se agora as coordenadas $cT = \sqrt{g_{00}(0)}\xi^0, X = \sqrt{g_{11}(0)}\xi^1; Y = \sqrt{g_{22}(0)}\xi^2; Z = \sqrt{g_{33}(0)}\xi^3$. O intervalo fica reduzido à forma simples da relatividade restrita, eq.(1). As coordenadas cT, X, Y, Z são, afinal, as coordenadas do observador em queda livre. Se estas variáveis diagonalizarem o tensor métrico em todos os pontos, i.e., se este tensor for constante, então não há campo gravítico para o observador em queda livre enquanto o campo existe, e é uniforme, para o observador que emprega as coordenadas x^μ iniciais. Este caso é análogo ao que se passa na segunda forma da eq. (12): a mudança de variáveis $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\phi = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ reduz aquela forma à cartesiana (primeira forma) em todos os pontos. As coordenadas r, ϕ descrevem afinal um plano.

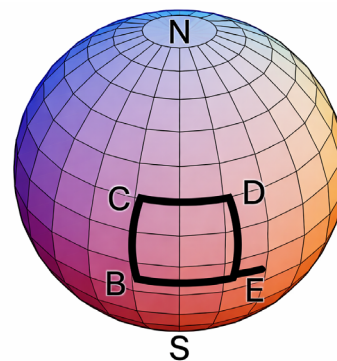


FIGURA 8. Detetando a curvatura de uma esfera.

Se, pelo contrário, nenhuma mudança de variáveis conseguir diagonalizar em todos os pontos o tensor métrico, então ele descreve um campo gravítico real, não uniforme, caracterizado por forças de marés, como abaixo se descreve. Este caso é análogo ao que se passa na eq.(13): nas vizinhanças de um ponto de coordenadas θ_0, ϕ_0 tem-se $d\ell^2 \simeq R^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta_0 d\phi^2)$, expressão que adquire a forma cartesiana com a mudança de variáveis $x = R\text{sen}\theta_0 (\phi - \phi_0)$, $y = R(\theta - \theta_0)$. Mas estas variáveis não convertem a eq.(13) na forma cartesiana em todos os pontos (elas descrevem o plano tangente à esfera no ponto considerado). A característica mais importante na eq. (13) é aquela métrica definir a curvatura da superfície considerada usando apenas aquelas coordenadas, i.e., pode ser detetada e medida por um ser imaginário bidimensional que vivesse na superfície. Para ilustrar esta afirmação, considere-se primeiro que tal ser vive num plano: partindo de um ponto A , percorre uma distância ℓ para a esquerda (ponto B), seguida pela mesma distância para cima (C), depois para a direita (D) e, finalmente, para baixo. O ser verifica ter chegado ao ponto de partida, concluindo que vive numa superfície plana (ou cilíndrica). Mas que acontece se fizer este exercício numa esfera (FIGURA 8)? Partindo de

A, percorrendo sempre a mesma distância ℓ , segue para Oeste ao longo do paralelo AB , para Norte ao longo do meridiano BC , para Este ao longo do paralelo CD e, finalmente, para Sul ao longo do meridiano DE (todos os ângulos são rectos). O ser descobre que não chega ao ponto de partida e conclui que vive numa superfície curva.

A curvatura do espaço-tempo pode ser definida para a métrica na eq. (14) (é, realmente, o tensor de Riemann que aqui não será apresentado). O seu não anulamento em todos os pontos caracteriza um campo gravítico real. Pode ser percebida da seguinte forma (FIGURA 9): duas partículas imóveis estão situadas no campo gravítico (eixo z) – uma em $z = 0$, a outra em $z = H$. Considerem-se as suas linhas de mundo durante o mesmo tempo τ marcado pelos seus relógios. Ora, o relógio em H está a um potencial gravítico maior que o relógio em 0 , pelo que é mais rápido, daí resultando uma linha de mundo mais curta (as linhas de mundo são definidas pela coordenada tempo t). Compare-se esta figura com a parte $ABCDE$ na FIGURA 8.

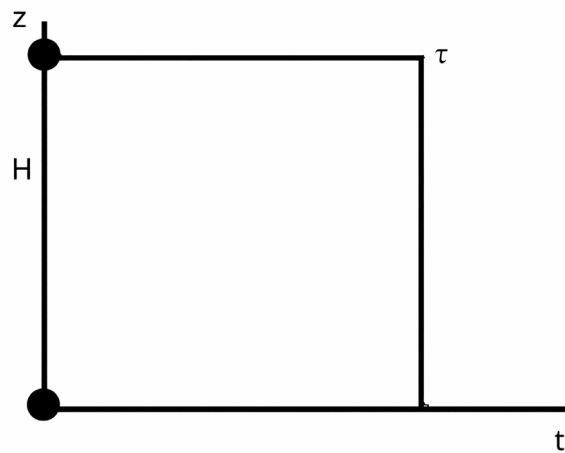


FIGURA 9. Linhas de mundo para o sempre tempo marcado por dois relógios a alturas diferentes num campo gravítico. A segunda linha vertical, de comprimento H , é marcada apenas para comparação.

Um outro exemplo onde se quantifica a curvatura. Considere-se uma esfera vazia de raio R e escolha-se um pequeno comprimento de onda $\lambda_0 \ll R$ para unidade de comprimento. Ao longo de um raio marquem-se N pontos igualmente espaçados de λ_0 , de modo que $R = N\lambda_0$, sendo $r_n = n\lambda_0$ a posição dos pontos, $n = 1, 2, \dots, N$. Preencha-se a esfera com uma massa M uniformemente distribuída. O potencial gravítico no interior da esfera obtém-se da eq.(4):

$$\varphi(r) = -\frac{GM}{2R}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

onde se escolheu $\varphi = 0$ na superfície da esfera para que λ_0 não seja alterado. Mas, pela eq. (7), a distância entre os pontos é alterada:

$$\lambda_0 \rightarrow \lambda_0\left(1 + \frac{\varphi(r)}{c^2}\right)$$

Assim, o comprimento do raio medido em profundidade é:

$$R_{\text{interior}} = \sum_{n=1}^N \lambda_0\left(1 + \frac{\varphi(r_n)}{c^2}\right) \rightarrow \int_0^R dr\left[1 - \frac{GM}{2R}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\right] = R - \frac{GM}{3c^2}$$

O raio R na superfície da esfera pode ser determinado medindo a área da esfera, em unidades de λ_0^2 , e definindo área $R = \sqrt{\frac{\text{área}}{4\pi}}$. Esta diferença entre os dois valores medidos para o raio, $R - R_{\text{interior}} = \frac{GM}{3c^2}$, é uma medida da curvatura do espaço-tempo: para a Terra, vale 1,5mm e para o Sol, 500m.

Um último exemplo invoca as forças de marés. Estas são devidas à não uniformidade da intensidade de um real campo gravítico. É responsável pelas marés, devido à ação da Lua e do Sol. Imaginem-se quatro massas formando um pequeno rectângulo $ABCD$. Num campo uniforme, as massas, largadas do repouso, caem com a mesma aceleração, pelo que o rectângulo se desloca paralelamente a si mesmo, mantendo, evidentemente, a mesma área. Num campo gravítico real, as linhas de força convergem para a massa que as definem, com a intensidade (aceleração da gravidade) decaindo com o inverso do quadrado da distância à fonte (FIGURA 10); o rectângulo deforma-se num trapézio: os lados $AB \rightarrow A'B'$ e $CD \rightarrow C'D'$ encurtam enquanto os lados $AC \rightarrow A'C'$ e $BD \rightarrow B'D'$ alongam, alterando a área da figura original. Este comportamento é característico de um campo gravítico não uniforme e a alteração da área é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo, da necessária mudança da métrica $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$.

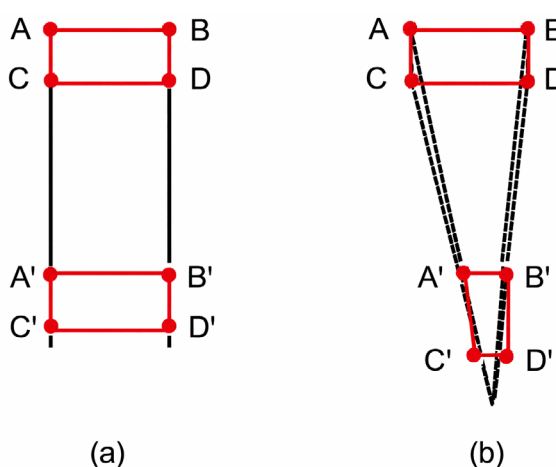


FIGURA 10. Massas em queda livre num campo gravítico uniforme (a) e num campo gravítico real (b).

As linhas de mundo de partículas e raios de luz.

Um observador em queda livre num campo gravítico real é, durante curtos períodos de tempo e na pequena região do espaço que atravessa, um observador inercial para quem a relatividade restrita se aplica. Partículas abandonadas a si mesmas (i.e., livres) têm movimentos uniformes e retilíneos e raios de luz satisfazem intervalo nulo. Mas todos os observadores são equivalentes apenas diferindo na descrição dos mesmos movimentos, tal como em Mecânica Clássica as forças centrífuga e de Coriolis são percebidas por um observador em rotação, mas não existem para um observador inercial. Ora, para o observador em queda livre o movimento uniforme e retilíneo caracteriza-se por dar um máximo ao tempo próprio de uma partícula (eq.(3)). Então, para qualquer observador, a linha de mundo da partícula entre dois pontos A e B do espaço-tempo é definida por:

$$\int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \text{ maximo}$$

A partícula move-se livremente num espaço-tempo “deformado”. A trajetória da partícula no espaço tridimensional é uma linha curva que é interpretada como ação da gravidade.

Uma analogia clarifica este resultado: em mecânica newtoniana, o movimento de uma partícula apenas sujeita a permanecer na superfície de uma esfera é, para um observador no exterior da esfera, um arco de meridiano ou, mais genericamente, para uma outra superfície, uma geodésica. Mas para um observador bidimensional imaginário vivendo na superfície da esfera, a partícula tem um movimento “retilíneo” e uniforme, i.e., a sua velocidade é constante e permanece paralela a si mesma (sempre tangente à esfera).

Para um raio de luz, o observador em queda livre caracteriza a sua linha de mundo pelo anu-
lamento do intervalo. Então, para qualquer observador, a linha de mundo do raio de luz é de-
terminada por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0$$

No espaço tridimensional, a trajetória aparece encurvada, um efeito atribuído à gravidade na
mecânica newtoniana.

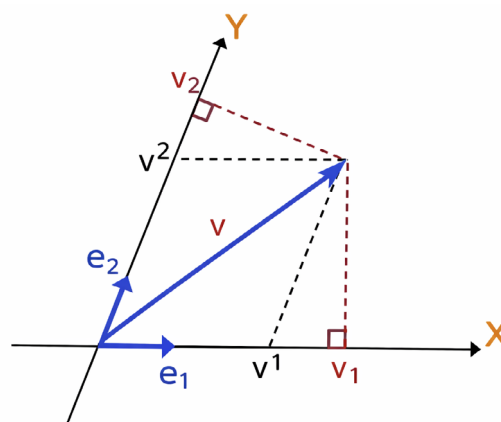
Como exemplo, considere-se uma partícula que parte de um ponto A e atinge um ponto B no
campo gravítico da Terra, numa pequena região de modo que o campo pode ser considerado uni-
forme. Imagine-se um observador no solo munido de um relógio que marca o tempo t . Comparado
com este relógio, o tempo próprio da partícula é maior $\delta t \left(1 + \frac{gz}{c^2}\right)$ pela eq. (10) mas, por outro lado,
é menor $\delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \delta t \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right)$ porque a partícula se move. Assim, a trajetória da partícula
deve maximizar $\int dt \left(\frac{gz}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}\right)$ ou multiplicando por $-mc^2$ (m , massa da partícula) deve mi-
nimizar $\int dt \left(\frac{1}{2}mv^2 - mgz\right)$. Reconhece-se o Princípio da menor ação onde o integrando é o
Lagrangiano; o resultado da minimização é a conhecida trajetória parabólica. Para um satélite em
órbita na Terra, a alteração do ritmo do seu relógio seja porque está em movimento (dilatação do
tempo), seja porque se situa a um potencial gravítico menor, é levada em conta no GPS, um excelen-
te exemplo de aplicação quer da relatividade restrita quer do princípio da equivalência.

Apêndice: sobre componentes covariantes e contravariantes de vectores.

No espaço tridimensional é habitual escolher-se uma base ortonormada para representar vec-
tores. Mas não tem que ser assim: quaisquer três vectores linearmente independentes podem
constituir uma base. Designando esses vectores por $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, então qualquer vector \vec{V}
pode decompor-se univocamente sob a forma:

$$\vec{v} = v^i \vec{e}_i$$

As três grandezas v^1, v^2, v^3 são designadas por componentes contravariantes do vector
(FIGURA 11).



(v_1, v_2) componentes covariantes.

(v^1, v^2) componentes contravariantes.

FIGURA 11. Componentes contravariantes e covariantes de um vector.

Mas o mesmo vector pode ser representado pelas suas projecções nos três vectores da base:

$$\mathbf{v}_i = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_i$$

As três grandezas V_1, V_2, V_3 são designadas por componentes covariantes do vector. Substituindo a equação anterior nesta, obtém-se:

$$\mathbf{v}_i = (\mathbf{v}^j \vec{\mathbf{e}}_j) \cdot \vec{\mathbf{e}}_i = g_{ij} \mathbf{v}^j$$

onde $g_{ij} \equiv \vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{e}}_j$ é uma matriz simétrica e não singular dada a independência linear dos vectores da base. Designando por $[g]^{-1}$ a matriz inversa de $[g]$, i.e., $(g^{-1})_{ij} g_{jk} = g_{ij} (g^{-1})_{jk} = \delta_{ik}$, é habitual definir $g^{ij} \equiv (g^{-1})_{ij}$. Multiplicando ambos os membros da última equação por g^{ki} e somando sobre o índice repetido, tem-se:

$$g^{ki} \mathbf{v}_i = (g^{-1})_{ki} g_{ij} \mathbf{v}^j = \mathbf{v}^k \quad (16)$$

Ficam, assim, estabelecidas as relações entre as componentes contravariantes e covariantes do mesmo vector.

Se a base for ortonormada, então $g_{ij} = g^{ij} = \delta_{ij}$, não havendo distinção entre os dois tipos de componentes.

Considere-se um pequeno deslocamento $d\vec{\ell}$; sendo um vector, escreve-se: $d\vec{\ell} = dx^i \vec{\mathbf{e}}_i$; então o quadrado deste vector, que é o quadrado da distância entre dois pontos muito próximos, fica:

$$d\ell^2 = (dx^i \vec{\mathbf{e}}_i) \cdot (dx^j \vec{\mathbf{e}}_j) = g_{ij} dx^i dx^j$$

Será evidente que a mesma receita se aplica ao quadrado de qualquer vector, i.e., ao quadrado da sua grandeza. Por esta razão a matriz $[g]$ é conhecida por tensor métrico – ela determina comprimentos e ângulos.

Note-se que a base pode ser local, i.e., variar continuamente de ponto para ponto, pelo que o tensor métrico dependerá, em geral, do ponto considerado.

Notas

^{a)} No que se segue, os índices gregos μ, ν tomam os valores 0 para coordenada temporal e 1, 2, 3 para as coordenadas espaciais, e.g., x, y, z . A diferença entre índices “em baixo”, covariantes, e “em cima”, contravariantes, é explicada no Apêndice. Soma sobre índice repetido é convenção adoptada.

^{b)} Esta equação é semelhante à equação de Poisson do Eletromagnetismo e deduz-se por simples comparação.

^{c)} O potencial do Sol na Terra é muito menor que o potencial na superfície do Sol mas cerca de 15 vezes maior que o potencial da Terra à sua superfície, pelo que $\varphi(\mathbf{A})$ pode ser ignorado.

REFERÊNCIAS

¹⁾ LAGE, E., [A teoria da relatividade restrita](#), Revista de Ciência Elementar, V12(2). 2024.

²⁾ LAGE, E., [Forças inerciais](#), Revista de Ciência Elementar, V15(1). 2017.