

O método de aproximação poligonal de Feynman.

CATEGORIA

Artigo

CITAÇÃO

Tavares, J. N. (2025)

O método de aproximação poligonal de Feynman,

Rev. Ciência Elem., V14(01):006.

doi.org/10.24927/rce2026.006

EDITOR

João Nuno Tavares

Universidade do Porto

EDITORES CONVIDADOS

Paulo Ribeiro-Claro, Mariela M. Nolasco

Universidade de Aveiro

RECEBIDO EM

13 de março de 2025

ACEITE EM

13 de março de 2025

PUBLICADO EM

15 de março de 2026

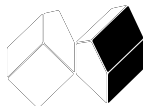
COPYRIGHT

© Casa das Ciências 2026.

Este artigo é de acesso livre, distribuído sob licença Creative Commons com a designação

[CC-BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/), que permite a utilização e a partilha para fins não comerciais, desde que citado o autor e a fonte original do artigo.

[rce.casadasciencias.org](https://www.casadasciencias.org)



João Nuno Tavares

U. Porto

Este é o segundo de dois artigos sobre a relação entre as leis de Kepler e a lei de atração universal de Newton. O primeiro, com o título *A Proposição XI dos Principia Mathematica de Newton*¹ foi publicado na edição de dezembro de 2024 da *Revista de Ciência Elementar*. Neste segundo artigo o objetivo é descrever como Feynman resolve o chamado problema inverso relativo à força central, usando apenas argumentos de geometria elementar, detalhados no texto que a seguir se apresenta.

1. Os problemas direto e inverso.

Para começar, suponhamos que temos um campo de forças central (ou radial) F , isto é, em cada ponto P (o Planeta), $F(P)$, a força aplicada numa partícula teste de massa 1, colocada em P , tem a direção da reta que une P a um centro de forças fixo S (o Sol).

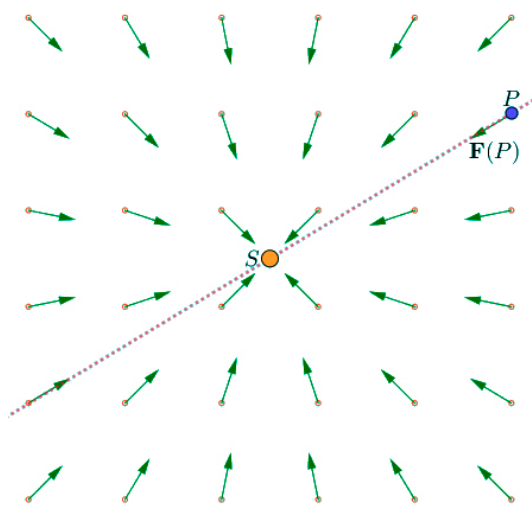


FIGURA 1. Campo de forças central F , de centro de forças fixo S . Em cada ponto P , $F(P)$, tem a direção da reta que une P ao centro de forças S . Na figura o campo é de atração. O Sol S atrai o planeta P . A força é dirigida de P para S .

Neste contexto, podemos formular dois problemas, que queremos discutir e resolver – o Problema direto e o Problema inverso, definidos como segue:

- Problema direto... Dada uma determinada trajetória, $t \mapsto P(t)$, da partícula P , e um centro de forças fixo, S , determinar como é que a intensidade da força depende da distância $|PS|$, entre P e S :

$$F(P) \stackrel{?}{=} \text{função de } |PS| \tag{1}$$

onde $F(P) = \|F(P)\|$ é a intensidade da força $F(P)$.

- Problema inverso... Conhecido o campo de forças central F , de centro de forças fixo S , determinar a trajetória, $t \mapsto P(t)$, de um ponto P que se move sob a ação desse campo de forças.

Como vimos no primeiro artigo¹, em 1687, Newton, na *Proposição I dos Principia*, usou a sua segunda lei: “força = massa × aceleração”, e um método de aproximação poligonal, para demonstrar a lei das áreas de Kepler, válida para qualquer força central, independentemente da sua intensidade! Por comodidade recordamos aqui essa proposição:

Proposição I dos Principia de Newton...

Seja S um ponto fixo (o Sol) e P um ponto móvel (um planeta) sobre o qual, em cada instante, a única força, $F(P)$, que nele atua é central, isto é, tem a direcção de P para S . Então:

- a trajetória de P é plana.
- o vetor \overrightarrow{SP} varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais (Lei das áreas de Kepler).

Já na Proposição XI dos Principia, que também aqui se recorda:

Proposição XI dos Principia de Newton...

Suponhamos que P se move numa elipse ε e que a aceleração de P é sempre radial, isto é, tem sempre a direcção de P para S , onde S é um foco da elipse ε .

Então a intensidade dessa aceleração, e portanto da força radial atrativa que atua em P , é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre P e S :

$$F(P) \propto 1/|SP|^2$$

Usando este resultado e novamente argumentos de aproximação, Newton criou um método geral para resolver o problema direto, isto é, um método geométrico que permite determinar a intensidade da força central responsável por um dado movimento orbital, em torno de um centro de forças fixo S . Este método genial foi exposto no primeiro artigo publicado na RCE de dezembro de 2024¹.

Os exemplos ilustrativos deste método geral, incluídos na sua grande obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, foram os seguintes:

	Órbita	Centro de forças	Força
1.	Circunferência	Centro de circunferência	$F(P) \equiv \text{constante}$
2.	Circunferência	Um ponto qualquer na circunferência	$F(P) \propto 1/ SP ^5$
3.	Eclipse	Centro da elipse	$F(P) \propto SP $
4.	Eclipse	Um foco da elipse	$F(P) \propto 1/ SP ^2$
5.	Espiral	Polo da espiral	$F(P) \propto 1/ SP ^3$

Onde o símbolo \propto significa “proporcional a”.

A linha 4, refere-se obviamente à lei de atração universal de Newton: “Se a órbita é uma elipse, e o centro de forças, S , é um foco dessa elipse, então a intensidade da força central é proporcional ao inverso do quadrado da distância de P a S : $F(P) \propto 1/|SP|^2$ ”.

2. A aula esquecida de Feynman. A aproximação poligonal de Feynman.

Feynman resolve, na sua *Lost lecture*³, o problema inverso relativo à força central

$$F(P) \propto \frac{1}{|SP|^2} \quad (2)$$

Por outras palavras, sabendo que a intensidade do campo de forças central, é proporcional ao inverso do quadrado da distância do planeta ao Sol, ele prova a primeira lei de Kepler (lei das elipses) – “Esse planeta move-se sobre uma elipse, com o sol S num dos focos” – usando apenas argumentos de geometria elementar!

Como vimos, Newton considera uma aproximação poligonal da órbita, constituída por uma série de pontos separados por um mesmo intervalo de tempo Δt . Em cada um desses pontos, a trajetória do planeta é desviada do movimento retilíneo, por inércia, por uma força impulsiva que o “empurra” em direção ao Sol (ver a FIGURA 5¹, que aqui se reproduz de novo: FIGURA 2).

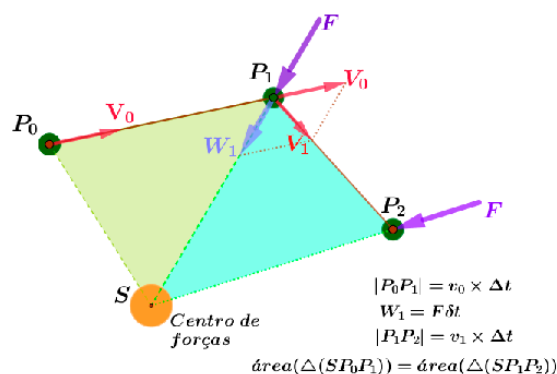


FIGURA 2. Método de aproximação poligonal de Newton.

Por outro lado, Richard Feynman³ usa uma aproximação poligonal diferente: os vértices da poligonal, em vez de estarem separados por um mesmo intervalo de tempo Δt , estão agora separados por um mesmo ângulo ao centro $\Delta\theta$. Veja a FIGURA 3, onde se comparam as duas abordagens, respetivamente, de Newton e Feynman, e ainda a FIGURA 4.

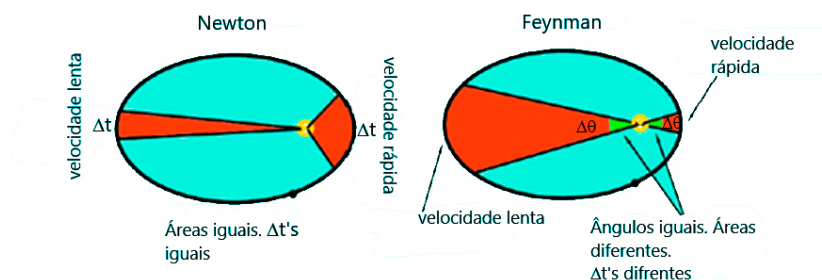


FIGURA 3. Diferenças nas abordagens de Newton e Feynman.

Na FIGURA 4 os dois segmentos têm um mesmo ângulo ao centro, mas delimitam áreas diferentes e, portanto, correspondem a tempos de percurso diferentes.

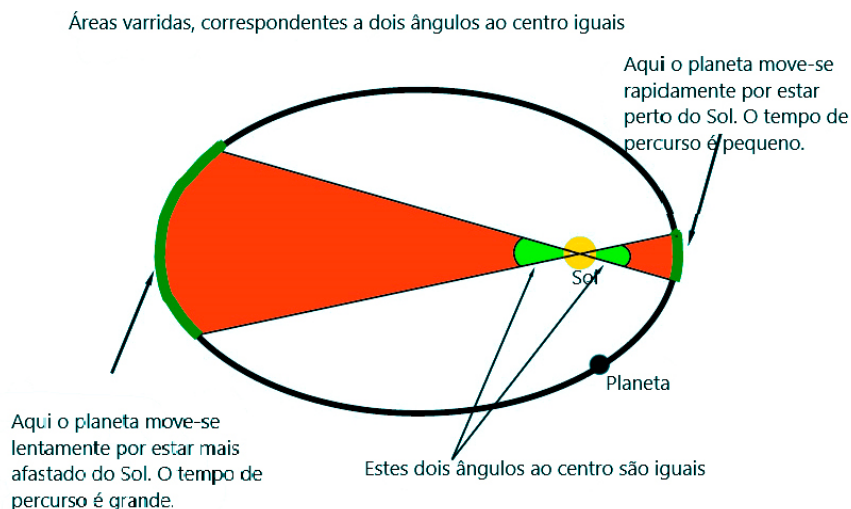


FIGURA 4. Os dois segmentos têm um mesmo ângulo ao centro mas delimitam áreas diferentes e portanto correspondem a tempos diferentes de percurso.

Analisemos agora a FIGURA 5. Do lado da órbita, mais próximo do Sol, o planeta vai de A para B . Aí é desviado por Δv e continua de B para C . Do outro lado da órbita, mais afastado do Sol, o planeta vai de D para E sofre um novo impulso Δv , e segue de E para F . Os percursos, AB , DE , e BC , EF , correspondem todos ao mesmo ângulo ao centro.

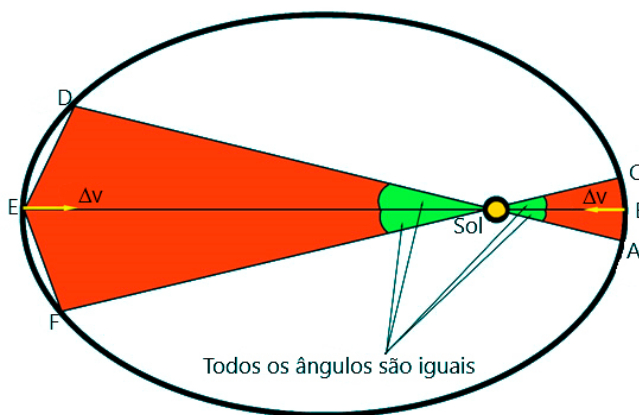


FIGURA 5. De um lado da órbita mais próximo do Sol, o planeta vai de A para B . Aí é desviado por Δv e continua de B para C . Do outro lado da órbita, o planeta vai de D para E sofre um novo impulso Δv , e segue de E para F .

Sabemos que o planeta se move mais rapidamente ao longo de BC do que ao longo de EF . De facto, de acordo com a lei das áreas, o planeta move-se mais rapidamente quando está mais perto do Sol do que quando está mais afastado.

Para saber quão mais rapidamente, temos que comparar as áreas dos triângulos $\Delta(SBC)$ e $\Delta(SEF)$, uma vez que os tempos são proporcionais às áreas (lei das áreas de Kepler).

Para isso, vamos ter que usar a fórmula (3):

$$\Delta A \propto R^2 \Delta \theta \quad (3)$$

onde $R = |SP|$ é a distância de P a S , e θ é medido em radianos.

A prova é simples¹². A FIGURA 6, ilustra o argumento:

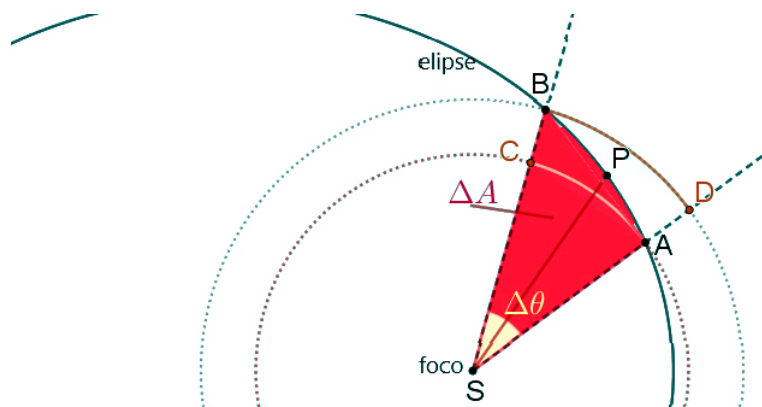


FIGURA 6. $\Delta A \propto |SP|^2 \Delta\theta = R^2 \Delta\theta$.

De facto, como se ilustra nessa FIGURA 6:

$$\frac{1}{2}|SA|^2 \Delta\theta \leq \Delta A \leq \frac{1}{2}|SB|^2 \Delta\theta$$

Quando $\Delta\theta \approx 0$, vemos (de uma forma intuitiva!) que $\Delta A \approx \frac{1}{2}|SP|^2 \Delta\theta = R^2 \Delta\theta$, como se pretendia.

Vamos agora mostrar que a variação da velocidade é proporcional à variação do ângulo e tem sempre a direcção radial, determinada pelo vetor de posição.

1. Pela segunda lei de Newton, sabemos que:

$$F \propto a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta\theta} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (4)$$

2. Por outro lado, pela lei das áreas (Kepler): $\Delta A \propto \Delta t$. Portanto obtemos:

$$\Delta t \propto \Delta A \propto R^2 \Delta\theta, \text{ atendendo a (3)}$$

isto é:

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \propto \frac{1}{R^2} \quad (5)$$

3. Recorde que estamos a resolver o problema direto, isto é, conhecemos a força central, e queremos saber qual a órbita de P . A força central é a força da atracção universal de Newton:

$$F(P) \propto \frac{\hat{r}}{|SP|^2} \quad (6)$$

onde $\hat{r} = \frac{\vec{SP}}{|\vec{SP}|}$ é um vetor unitário com a direcção do raio vetor \vec{SP} .

4. Reunindo toda esta informação, temos então que, respetivamente, por (6), (4) e (5):

$$\frac{\hat{r}}{R^2} \propto F \propto \frac{\Delta v}{\Delta\theta} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \propto \frac{\Delta v}{\Delta\theta} \frac{1}{R^2}$$

o que implica que:

$$\frac{\Delta v}{\Delta \theta} \propto \hat{r}$$

ou ainda:

$$\Delta v \propto \hat{r} \Delta \theta \quad (7)$$

que era o que se pretendia provar, isto é: a variação da velocidade é proporcional à variação do ângulo e tem sempre a direcção radial, determinada pelo vetor de posição.

Em particular, Δv não depende de $R = |SP|$!

Em todo o ponto da órbita, não importa quão distante ou quão perto de S esteja, o Δv , correspondente a um dado ângulo $\Delta \theta$, sempre é o mesmo.

Resumindo: Δv não depende de $R = |SP|$, porque, como acabámos de ver, à medida que o planeta se afasta do Sol, a força que sobre ele atua fica cada vez mais fraca (diminui com o quadrado da distância), mas o tempo em que atua no planeta aumenta (com o quadrado da distância). O resultado é que todos os Δv 's são iguais.

Veja novamente as diferenças entre as abordagens de Newton e Feynman:

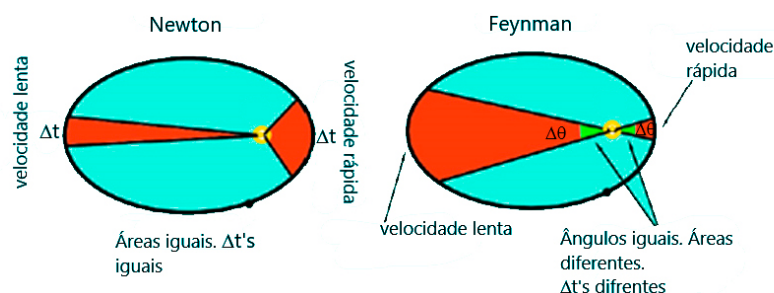


FIGURA 7. Diferenças nas abordagens de Newton e Feynman.

- Newton: os intervalos de tempo eram todos iguais e os Δv 's apontam todos para o Sol, mas os Δv 's são diferentes – os maiores Δv 's ocorrem quando o planeta está mais próximo do Sol.
- Feynman: os ângulos centrais são todos os mesmos e portanto os Δt 's são diferentes. Os Δv 's apontam todos para o Sol e são todos iguais, em módulo, ao longo de toda a órbita.

Este é o resultado principal de Feynman, que permite resolver o problema direto relativo à força de atração universal de Newton. Concretamente: permite reconstruir a aproximação poligonal da órbita, dados:

1. A posição inicial P_0 do planeta,
2. A sua velocidade inicial v_0 , e ainda
3. O valor constante de Δv .

De facto, como se pode ver na FIGURA 8:

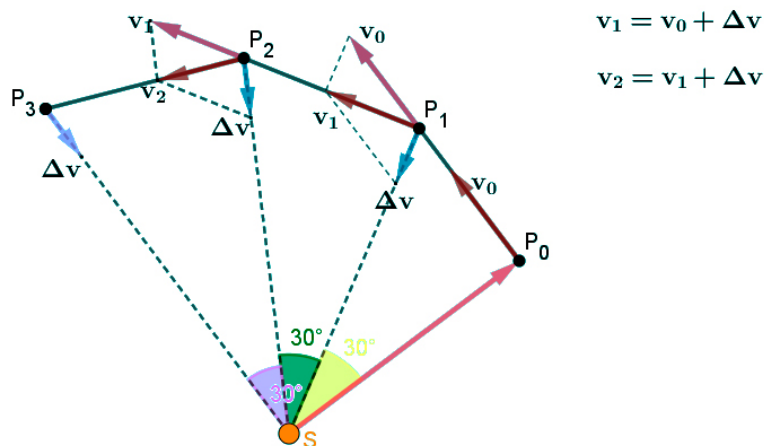


FIGURA 8. Aproximação poligonal de Feynman.

1. O planeta, partindo de P_0 , segue em linha recta com movimento uniforme com velocidade v_0 . Quando o raio vetor varre um ângulo ao centro de Δt (igual a 30° , por exemplo), o planeta atinge o ponto P_1 .

2. No ponto P_1 o planeta sofre uma força impulsiva que muda a sua velocidade de Δv no sentido radial. A nova velocidade v_1 é calculada pela regra do paralelogramo $v_1 = v_0 + \Delta v$.

3. O planeta, partindo de P_1 , segue com movimento rectilíneo uniforme com velocidade v_1 . Quando o raio vetor varre um ângulo ao centro de Δt (igual a 30° , por exemplo), o planeta atinge o ponto P_2 .

4. No ponto P_2 o planeta sofre uma força impulsiva que muda a sua velocidade de Δv no sentido radial. A nova velocidade v_2 é calculada pela regra do paralelogramo $v_2 = v_1 + \Delta v$.

e assim sucessivamente.

3. Hodógrafo de Hamilton.

A reconstrução da órbita do planeta P , pode conseguir-se com o recurso engenhoso a uma ideia criada por Hamilton. O chamado hodógrafo de Hamilton. Vejamos como.

Na FIGURA 9 temos:

- À esquerda, a trajetória poligonal determinada pelo método de Feynman, descrito na secção anterior,
- À direita, destacou-se, num diagrama separado, a sucessiva variação das velocidades. É a este diagrama de velocidades que se chama o hodógrafo de Hamilton⁴, que foi quem o inventou.

Como se assinala na figura da direita de FIGURA 9, como todos os lados (vermelhos) têm o mesmo comprimento, igual a Δv , e como todos os ângulos externos são iguais a Δt (igual a 30° , por exemplo), o hodógrafo para o movimento de um planeta sob a ação de um campo de atração Newtoniano, é uma circunferência. O seu centro C em geral não coincide com a origem O do hodógrafo (FIGURA 9).

Se na figura da esquerda 9, dividirmos a trajetória em sectores que subentendem ângulos iguais Δt , e supondo que $360/\Delta t = n$ inteiro, (por exemplo, se $\Delta t = 30^\circ$, como nas figuras an-

teriores), obtemos uma trajetória poligonal com n vértices (se $\Delta t = 30^\circ$, obtemos uma poligonal com $360/30 = 12$ vértices). Na figura da esquerda 9, estão apenas representados 5 pontos P_0, \dots, P_4 .

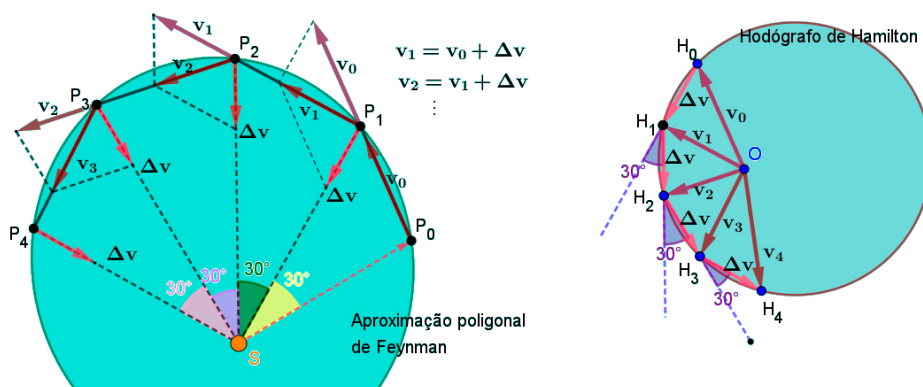


FIGURA 9. O hodógrafo de Hamilton (à direita).

Já no Hodógrafo (figura da direita 9), no limite, quando $\Delta t \rightarrow 0$, o polígono $H_0H_1H_2H_3 \dots$ torna-se uma circunferência C de raio K . O centro dessa circunferência é o ponto de onde parte \hat{r} . De facto, a “velocidade” do hodógrafo, tangente a C , é a aceleração a .

Hamilton inventou o hodógrafo como uma nova maneira de pensar uma trajetória: um ponto H_i do hodógrafo de centro O , representa o vetor velocidade, $v_i = \overrightarrow{OH_i}$, num certo instante. Portanto o hodógrafo representa a variação do vetor velocidade com o tempo – o arco de hodógrafo entre dois instantes infinitamente próximos é proporcional à aceleração. Por outras palavras, a “velocidade” do hodógrafo representa a aceleração a do corpo.

4. Dado o hodógrafo e a sua origem O , como determinar a trajetória?

Dada a trajetória é fácil construir o hodógrafo correspondente, como está bem claro na FIGURA 9. Fixamos arbitrariamente uma origem O e, para cada instante t , desenhamos o vetor $v(t)$, aplicado em O , e que representa a velocidade do planeta nesse instante t .

Reciprocamente, dado o hodógrafo e a sua origem O , como determinar a trajetória?

O problema que surge agora, é que, embora saibamos, através do hodógrafo, a direcção e grandeza do vetor velocidade, não sabemos em que ponto do plano, pertencente à órbita, é que ele é tangente a essa órbita? Não sabemos pois onde o colocar!

Feynman resolve imaginativamente, embora só parcialmente, o problema rodando o hodógrafo de 90° graus, no sentido horário. O hodógrafo continua um círculo mas agora todos os raios do hodógrafo são perpendiculares às verdadeiras direcções das velocidades. Além disso, o ângulo ao centro θ é o mesmo em ambos os diagramas (o de posições e o de velocidades).

Para obter a trajetória, Feynman desenha-a diretamente sobre o hodógrafo. A solução é de facto parcial, porque o tamanho da trajetória não fica determinado, embora a sua forma seja a correta.

Vejamos como (veja a FIGURA 10).

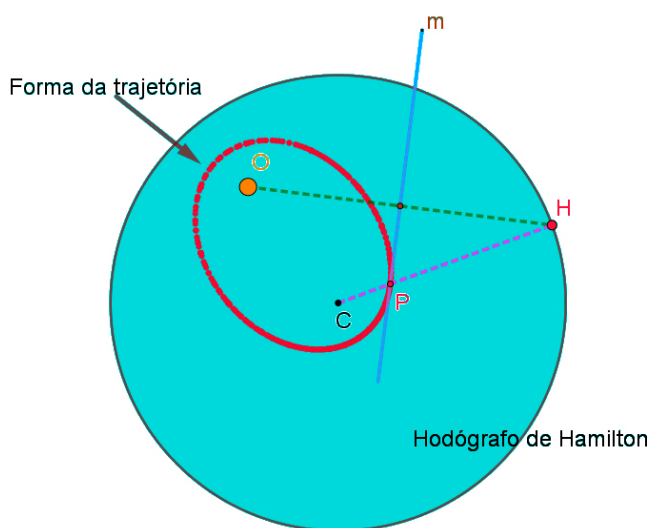


FIGURA 10. Como reconstruir a forma da trajetória a partir do hodógrafo de Hamilton.

1. O hodógrafo é uma circunferência de centro C , como sabemos, e com uma origem arbitrária O , não coincidente com C .
2. Considere-se um ponto H no hodógrafo.
3. Una-se H a O e considere-se a mediatriz m do segmento OH .
4. Intersecte-se essa mediatriz com a recta CH , que une H ao centro uma circunferência, para obter o ponto P .
5. Quando H varia sobre o hodógrafo, P descreve uma elipse (ou uma hipérbole) cujos focos são O e C . Além disso, a mediatriz m é tangente à elipse no ponto P .

REFERÊNCIAS

- ¹TAVARES, J. N., *A Proposição XI dos Principia Mathematica de Newton*, Revista de Ciência Elementar da Casa das Ciências, 2024.
- ²KOWEN, M. & MATHUR, H., *On Feynmann's analysis of the geometry of Kepler*, Am. J. Physics, 71 (4), 397-401. 2003.
- ³GOODSTEIN, D. & GOODSTEIN, J., *Feynman's lost lecture*, Vintage, 1997.
- ⁴BRESSOUD, *Second Year Calculus*, Springer-Verlag, 1991.
- ⁵BRESSOUD, D. M., *Second Year Calculus: From Celestial Mechanics To Special Relativity*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1993.
- ⁶BRACKENRIDGE, J. B., *The Key to Newton's Dynamics: The Kepler Problem and the Principia*, University of California Press, 1996.
- ⁷HAHN, A. J., *Basic Calculus of Planetary Orbits and Interplanetary Flight: The Missions of the Voyagers, Cassini, and Juno*, Springer-Verlag, 2021.
- ⁸HERMAN, E., *Passage to the limit in Proposition I, Book of Newton's Principia*, Hist. Math, 30, No.4, 432-440. 2003.
- ⁹HERMAN, E., *The instantaneous impulse construction as a formula for central force motion on an arbitrary plane curve with respect to an arbitrary force centre in the plane of that curve*, Ann. Sci, 49, No.4, 369-375. 1992.
- ¹⁰POURCIAU, B., *Newton's argument for Proposition 1 of the Principia*, Arch. Hist. Exact Sci, 57, No.4, 267-311. 2003.
- ¹¹NAUENBERG, M., *Kepler's area law in the Principia: filling in some details in Newton's proof of Proposition 1*, Hist. Math, 30, No.4, 441-456. 2003.
- ¹²SWOKOWSKI, E., *Calculus with Analytic Geometry*, Brooks/Cole, Página 12. 1983.