

Progressão aritmética

CITAÇÃO

Tavares, J. (2014)
Progressão aritmética,
Rev. Ciência Elem., V2(02):167.
doi.org/10.24927/rce2014.167

EDITOR

José Ferreira Gomes,
Universidade do Porto

RECEBIDO EM

25 de outubro de 2009

ACEITE EM

17 de dezembro de 2010

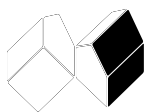
PUBLICADO EM

17 de dezembro de 2010

COPYRIGHT

© Casa das Ciências 2014.
Este artigo é de acesso livre,
distribuído sob licença Creative
Commons com a designação
[CC-BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/), que permite
a utilização e a partilha para fins
não comerciais, desde que citado
o autor e a fonte original do artigo.

rce.casadasciencias.org



João Nuno Tavares

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Uma progressão aritmética é uma sucessão de números reais un em que cada termo é obtido do anterior somando um número real fixo a que se chama razão:

$$u_1, u_2 = u_1 + r, u_3 = u_2 + r, \dots, u_n = u_{n-1} + r, \dots$$

Por outras palavras, uma sucessão (u_n) , de números reais, é uma progressão aritmética se e só se a diferença entre dois termos consecutivos é constante. Esta constante r é a razão:

$$u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = \dots = u_n - u_{n-1} = \dots = r$$

Daqui se conclui que:

$$u_2 = \frac{u_1 + u_3}{2}, u_3 = \frac{u_2 + u_4}{2}, \dots, u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} \dots$$

Isto é, cada termo é a média aritmética dos dois termos vizinhos imediatos.

Exemplos:

- $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$ é a progressão aritmética de razão 1 e o $u_1=1$
- $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots, \frac{n}{2}$ é a progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$ e o $u_1=\frac{1}{2}$

Nota

Se considerarmos $r=0$ obtemos a sucessão constante em que $u_1 = u_2 = \dots = u_n = \dots$
Como se calcula a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética de razão r ?
Seja $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n$ a soma pretendida dos n primeiros termos. Note que:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1 \\ u_2 &= u_1 + r \\ u_3 &= u_2 + r = u_1 + 2r \\ &\vdots \\ u_n &= u_{n-1} + r = u_1 + (n-1)r \end{aligned}$$

Escrevemos agora a soma S_n de duas formas:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n$$

e

$$S_n = u_n + u_{n-1} + u_{n-3} + \cdots + u_2 + u_1$$

Somando termo a termo vem:

$$\begin{aligned} 2S_n &= (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + \cdots + (u_{n-1} + u_2) + (u_n + u_1) \\ &= (u_1 + u_n) + (u_1 + r + u_n - r) + (u_n - r + 1 + r) + (u_n + u_1) \\ &= (u_1 + u_n) + (u_1 + u_n) + \cdots + (u_n + u_1) + (u_n + u_1) \\ &= n(u_1 + u_n) \end{aligned}$$

Portanto:

$$S_n = nu_1 + r \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

Substituindo $u_n = u_1 + (n-1)r$, obtemos uma outra fórmula para a soma:

$$S_n = nu_1 + r \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

Exemplos:

• A soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$

é $S_n = n \cdot \frac{1+n}{2}$ ou $S_n = n \cdot 1 + r \cdot \frac{n(n+1)}{2}$. Em particular,

$$S_{100} = 1 + 2 + \cdots + 100 = 100 \cdot \frac{100+1}{2} = 5050.$$

Curiosidades

Conta-se que o matemático Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), com sete anos, respondeu ao seu professor, que pedira aos alunos que somassem os números inteiros de um a cem, logo que este acabara de enunciar a questão, chegando ao resultado com o seguinte raciocínio:

$$1+100=101$$

$$2+99=101$$

$$3+98=101$$

⋮

$$100+1=101$$

logo, o resultado procurado é $100 \times \frac{101}{2} = 5050$.