REVISTA DE CIÊNCIA ELEMENTAR

Equações da reta

João Nuno Tavares*, Ângela Geraldo[I]
*Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
[I] CMUP/ Universidade do Porto

CITAÇÃO
Tavares, J. N., Geraldo, A.(2017)
Equações da reta,
Rev. Ciência Elem., V5(02):074.
doi.org/10.24927/rce2017.074

EDITOR
José Ferreira Gomes
Universidade do Porto

RECEBIDO EM
03 de junho de 2013

ACEITE EM
12 de junho de 2013

PUBLICADO EM
30 de junho de 2017

rce.casadasciencias.org

Reta que passa num ponto e é perpendicular a um vetor.

Equação cartesiana

Considerando um ponto A=(x_A,y_A) e um vetor $\vec{n}$, a reta que passa por A e é perpendicular a $\vec{n}$ é definida através da equação $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$, onde P=(x,y) um ponto genérico da reta considerada.

Se $\vec{n}=(a,b)$ e $\overrightarrow{AP}=$(x−xA,y−yA), $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=$(a,b)·(x−xA,y−yA)=a(x−xA)+b(y−yA), e então a equação escreve-se da forma,

$$a(x-x_A)+b(y-yA)=0$$

e diz-se a equação cartesiana da reta referida.

Exemplos

- **2x−y=0 é a equação cartesiana da reta que passa, por exemplo, no ponto A=(1,2) e é perpendicular ao vetor $\vec{n}$ =(2,−1).**
- **2y=$\frac{x}{3}$ é a equação cartesiana da reta que passa, por exemplo, no ponto A=(3,1/2) e é perpendicular ao vetor $\vec{n}$ =(−1/3,2).**

Alicação

Como calcular a equação cartesiana da reta que passa em A=(−1,2) e é perpendicular ao vetor $\vec{n}$ =(3,4)?

Consideramos P=(x,y) um ponto genérico dessa reta, então o vetor $\overrightarrow{AP}=$P−A=(x,y)−(−1,2)=(x+1,y−2) é ortogonal ao vetor $\vec{n}$. Portanto, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$, isto é,

$$(x+1,y-2)\cdot(3,4)=0 \Leftrightarrow 3(x+1)+4(y-2)=0 \Leftrightarrow 3x+4y=5.$$

Equação vetorial

Considerando a mesma reta, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$, onde $\vec{n}$ =(a,b), vejamos que o vetor $\vec{v}$ =(−b,a) tem a mesma direção dessa reta. De facto $\vec{n}\cdot\vec{v}$ =(a,b)·(−b,a)=−ab+ba=0. Portanto a reta é também o conjunto de todos os pontos P=(x,y), tais que P−A= $\overrightarrow{AP}$ é um múltiplo escalar de vetor $\vec{v}$. Isto é, (P−A)=t$\vec{v}$.

$$P\in\mathbb{R}^2 : P=A+t\vec{v}, \qquad t\in\mathbb{R}$$

A equação P=A+t$\vec{v}$ diz-se a equação vetorial da reta que passa no ponto A e é paralela ao vetor $\vec{v}$.

Equações paramétricas

Se $\overrightarrow{AP}$=(x−x_A,y−y_A), então, como $\vec{v}$ =(−b,a),
$\overrightarrow{AP}$=t$\vec{v}$ $\Leftrightarrow$ (x−x_A,y−y_A)=t(−b,a) $\Leftrightarrow$ x−x_A=−tb $\wedge$ y−y_A=ta, sendo assim equivalente ao sistema de duas equações seguinte:

$$\begin{cases} x = x_A - tb \\ \\ y = y_A + ta \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}$$

Que se dizem equações paramétricas da reta referida. Quando o "tempo" t varia, elas representam o movimento de um ponto (partícula) que se desloca sobre a reta com movimento uniforme de vetor-velocidade $\vec{v}$ =(−b,a) e velocidade (escalar) $v = \|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Aplicação

Como calcular as equações paramétricas da reta que passa no ponto A=(2,−3) e é perpendicular ao vetor $\vec{n}$ =(1,4)?

O vetor $\vec{v}$ =(−4,1) é perpendicular ao vetor $\vec{n}$ pois $\vec{n} \cdot \vec{v}$ =(1,4)·(−4,1)=−4+4=0. Portanto, pretendemos as equações paramétricas da reta que passa em A=(2,−3) e é paralela ao vetor $\vec{v}$ =(−4,1). Se P=(x,y) um ponto genérico dessa reta, então

$\overrightarrow{AP}$=P−A=(x,y)−(2,−3)=(x−2,y+3) é um múltiplo escalar do vetor $\vec{v}$, isto é, $\overrightarrow{AP}$=t$\vec{v}$, ou seja,

$$(x-2, y+3) = t\,(-4,1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = -3 + t, \qquad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Reta que passa por dois pontos

Equação vetorial

Pretendemos agora determinar a equação de uma reta que passa em dois pontos distintos. Temos então dois casos:

No plano, sejam A=(x_A,y_A) e B=(x_B,y_B) esses dois pontos, queremos então determinar a equação da reta que passa por A e é paralela ao vetor $\overrightarrow{AB}$. Se P=(x,y) é um ponto genérico dessa reta temos que,

$$P = A + t\overrightarrow{AB}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

que é chamada a equação vetorial da reta. Em coordenadas,

$$(x, y) = (x_A, y_A) + t\,(x_B - x_A, y_B - y_A)\,, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

No espaço, considerando A=(x_A,y_A,z_A) e B=(x_B,y_B,z_B) os dois pontos pelos quais passa a reta a sua equação vetorial é:

Aplicação

Como calcular a equação vetorial da reta que passa pelos pontos A=(2,-1,0) e B=(-3,1,2)?

Consideramos P=(x,y,z) um ponto genérico dessa reta. A reta pretendida passa pelos pontos A e B por isso é uma reta paralela ao vetor $\overrightarrow{AB}$=B-A=(-3,1,2)-(2,-1,0)=(-5,0,2). Portanto a equação vetorial dessa reta é dada por:

$$P = A + t\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (x,y,z) = (2,-1,0) + t\,(-5,0,2)\,, \qquad t \in \mathbb{R}$$

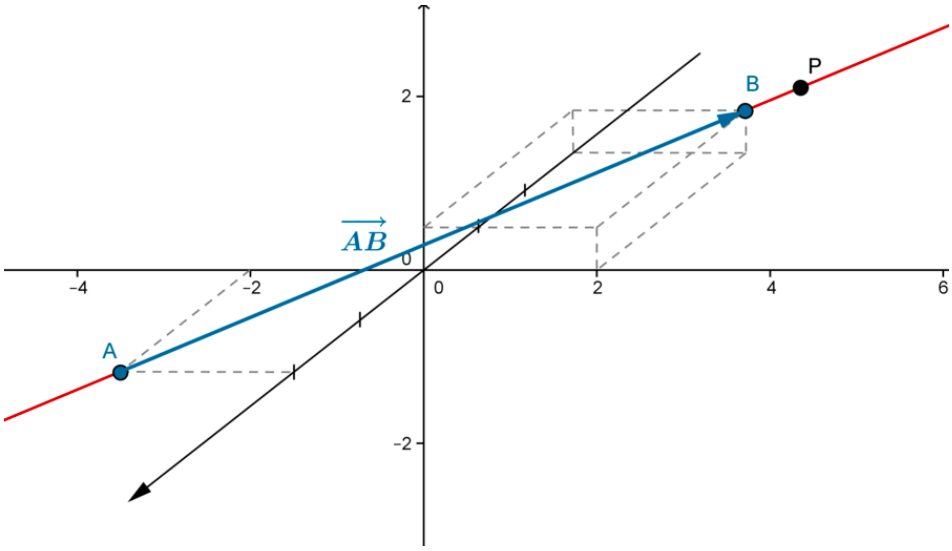

FIGURA 1. Reta que passa por dois pontos (no espaço).

Equações paramétricas

Das equações vetoriais da reta anteriores podemos obter as equações paramétricas.

Para o caso em que A e B são pontos em $\mathbb{R}^2$ a equação vetorial da reta é equivalente a $x=x_A+t(x_b-x_A) \wedge y=y_A+t(y_B-y_A)$, ou num sistema:

$$\begin{cases} x = x_A + t\,(x_B - x_A) \\ y = y_A + t\,(y_B - y_A) \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}$$

Para o caso em que A e B são pontos em $\mathbb{R}^3$ a equação vetorial da reta é equivalente a $x=x_A+t(x_b-x_A) \wedge y=y_A+t(y_B-y_A) \wedge z=z_A+t(z_B-z_A)$, ou num sistema, considerando $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x = x_A + t\,(x_B - x_A) \\ y = y_A + t\,(y_B - y_A) \\ z = z_A + t\,(z_B - z_A) \end{cases}$$

Equação cartesiana

Simplificando os sistemas anteriores e eliminando o parâmetro t, obtemos do primeiro sistema a equação cartesiana da reta no plano, que passa pelos pontos $A=(x_A,y_A)$ e $B=(x_B,y_B)$:

$$(y_B-y_A)(x-x_A)=(y-y_A)(x_B-x_A)$$

- Se $x_B-x_A=0$, então $y_B-y_A\neq 0$, pois os dois pontos são distintos, e a reta é uma reta vertical de equação $x=x_A$.
- Se $y_B-y_A=0$, então $x_B-x_A\neq 0$, pois os dois pontos são distintos, e a reta é uma reta horizontal de equação $y=y_A$.
- Se $x_B-x_A\neq 0$ e $y_B-y_A\neq 0$, a reta tem por equação:

$$y = y_A + \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)}\,(x - x_A)$$

Do segundo sistema obtemos as equações cartesianas (também chamadas equações homogéneas) da reta que passa em A e B no espaço, com A,B$\in \mathbb{R}^3$.

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}$$

Equação reduzida de uma reta

Inclinação e declive da reta

A inclinação de uma reta é o menor ângulo positivo α que a reta faz com a parte positiva do eixo dos xx.

Considerando dois pontos dessa reta, $A(x_A,y_A)$ e $B=(x_B,y_B)$, o declive da reta, usualmente denominado por m, é o quociente entre a diferença das ordenadas e a diferença das abcissas de dois pontos dessa mesma reta, ou seja,

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Se $x_B-x_A\neq 0$ e $y_B-y_A\neq 0$ então temos uma reta não vertical e não horizontal. Se $x_B-x_A=0$ a reta é vertical e diz-se que o seu declive é infinito. Já se $y_B-y_A=0$ temos uma reta horizontal (com declive nulo).

Através da trigonometria, o declive de uma reta é diretamente associado à inclinação da mesma pois, pela definição de tangente de um ângulo concluímos que o declive da reta é igual à tangente da inclinação da mesma, ou seja:

$$m = \tan\alpha$$

Equação y=mx+b

A equação reduzida de uma reta no plano é definida através da expressão,

$$y = mx + b$$

em que m é o declive da reta e b a ordenada na origem.

O valor b é assim a ordenada do ponto de interseção da reta considerada com o eixo dos yy, ponto (0,b), ou o valor que se obtém para y quando substituímos o valor de x por zero.

Aplicação

Como calcular a equação reduzida da reta que passa pelos pontos A=(2,−1) e B=(4,6)?

Começamos por determinar o declive da reta: $m = \dfrac{6-(-1)}{4-2} \Leftrightarrow m = \dfrac{7}{2}$. Temos então que $y = \frac{7}{2}x + b$.

Para determinarmos o valor de b basta substituirmos na expressão anterior os valores de x e y pelas coordenadas de um dos pontos. Substituindo pelas coordenadas de A obtemos:

$$-1 = \frac{7}{2} \times 2 + b \Leftrightarrow b = -1 - 7 = -8$$

Concluímos então que a equação da reta pretendida é $y = \frac{7}{2}x - 8$.