REVISTA DE CIÊNCIA ELEMENTAR

Resolução de triângulos

João Nuno Tavares*, Ângela Geraldo[ǂ]
* Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
ǂ CMUP/ Universidade do Porto

CITAÇÃO
Tavares, J. N., Geraldo, A.(2017)
Resolução de triângulos,
Rev. Ciência Elem., V5(03):079.
doi.org/10.24927/rce2017.079

EDITOR
José Ferreira Gomes
Universidade do Porto

RECEBIDO EM
19 de fevereiro de 2013

ACEITE EM
23 de março de 2013

PUBLICADO EM
30 de setembro de 2017

rce.casadasciencias.org

O que é resolver um triângulo

Em qualquer triângulo podemos considerar como *elementos principais* os seus três lados e os três ângulos internos e todos os outros elementos como *elementos secundários*, como por exemplo, as alturas, as medianas, o raio do círculo circunscrito, etc.

A resolução de triângulos consiste em determinar alguns elementos do triângulo a partir de elementos já conhecidos. Quando se diz determinar os elementos entenda-se determinar a medida desses elementos.

Resolução de triângulos retângulos
Relações entre os seus elementos

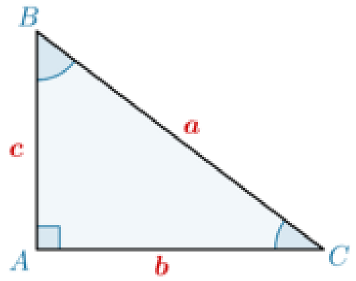


FIGURA 1. Triângulo retângulo.

Considerando um triângulo retângulo $[ABC]$ e designemos por a, b e c os lados desse triângulo e por A, B e C os seus ângulos internos opostos a cada um dos lados, respetivamente (FIGURA 1).

Estes seis elementos do triângulo satisfazem relações importantes, tais como (considerando A=90º):

$$a^2=b^2+c^2 \text{ (Teorema de Pitágoras)}$$

$$B+C=90^\circ \text{ (ângulos complementares)}$$

Pelas definições de seno e cosseno de um ângulo agudo sabemos que $B = \frac{b}{a}$ e $\cos B = \frac{c}{a}$ donde resulta que, $b = a \sin B$ e $c = a \ \cos B$.

Como B e C são ângulos complementares temos ainda que $\sin B = \cos C$ e que $\cos B = \sin C$, passando as fórmulas anteriores a serem equivalentes a $b = a \cos C$ e $c = a \sin C$, respetivamente.

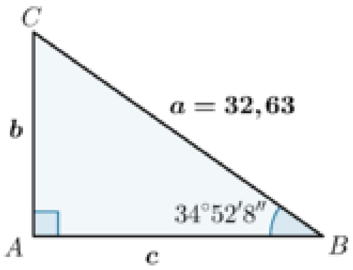
Resolução de triângulos retângulos

Sabemos que para definir um triângulo precisamos conhecer três dos seus elementos, sendo um deles necessariamente um lado. Como estamos a considerar triângulos retângulos um dos ângulos já é conhecido, o ângulo reto, por isso bastam mais dois elementos. Existem assim quatro casos possíveis.

1ºcaso - São conhecidos a hipotenusa e um ângulo agudo

Neste caso, para determinar a amplitude do ângulo agudo desconhecido, usamos o facto de B e C serem ângulos complementares. Em seguida, usamos as fórmulas $b = a \sin B$ e $c = a \cos B$ para determinar o comprimento dos dois catetos.

Exemplo 1



Sabendo que a hipotenusa a=32,63cm e que o ângulo agudo B=34º52′8″, temos então que:
Cálculo de C: C=90º−(34º52′8″)=55º7′52″
Cálculo do comprimento dos catetos:

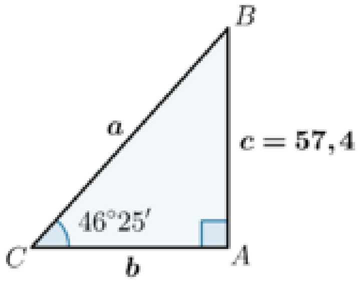
$b = a \sin B \Leftrightarrow b = 32,63 \times \sin\left(55^o 7' 52''\right) \Leftrightarrow b \simeq 26,77$ cm

$c = a \cos B \Leftrightarrow c = 32,63 \times \cos\left(55^o 7' 52''\right) \Leftrightarrow c \simeq 18,65$ cm

2ºcaso - São conhecidos um cateto e um ângulo agudo

Neste caso, para determinar a amplitude do ângulo agudo desconhecido, usamos o facto de B e C serem ângulos complementares. Em seguida, considerando o ângulo oposto ao cateto conhecido, sabemos que o seno desse ângulo é igual ao quociente entre o cateto conhecido (cateto oposto) e a hipotenusa, daí resulta que o comprimento da hipotenusa é igual ao quociente entre o cateto e o seno desse ângulo. Ou, se considerarmos o ângulo agudo cujo cateto adjacente é o cateto conhecido, sabemos que o cosseno desse ângulo é igual ao quociente entre o cateto conhecido e a hipotenusa, daí resulta que o comprimento da hipotenusa é igual ao quociente entre o cateto e o cosseno desse ângulo. Para determinar o terceiro lado do triângulo usamos o Teorema de Pitágoras.

Exemplo 2



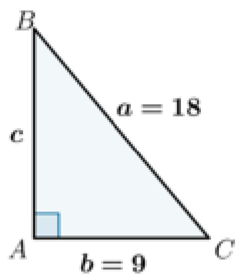
Conhecidos o cateto c=57,4 cm e o ângulo agudo C=46º25′ temos então que:
Cálculo de B: B=90º–(46º25′)=43º35′
Cálculo do comprimento da hipotenusa e cateto:

$$\sin C = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a = \frac{57,4}{\sin\left(46^o 25'\right)} \Leftrightarrow a \simeq 79,24$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow (79,24)^2 = b^2 + (57,4)^2 \Leftrightarrow b \simeq 54,63$$

3ºcaso - São conhecidos a hipotenusa e um cateto
Para determinarmos o comprimento do terceiro lado do triângulo usamos diretamente o Teorema de Pitágoras. Conhecidos os três lados do triângulo, utilizamos as razões trigonométricas para determinar a amplitude de cada um dos ângulos agudos.

Exemplo 3



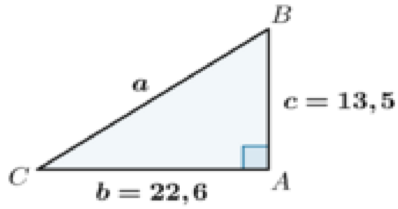
Conhecidos a hipotenusa a=18 cm e o cateto b=9 cm temos então que:
Cálculo do segundo cateto utilizando o T.Pitágoras:
$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 18^2 = 9^2 + c^2 \Leftrightarrow c \simeq 15,59$ cm
Determinação das amplitudes dos dois ângulos agudos:

$$\sin B = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \sin B = \frac{9}{18} \Leftrightarrow B = \sin^{-1}(0,5) = 30^o C = 90^o - B \Leftrightarrow C = 90^o - 30^o = 60^o$$

4ºcaso - São conhecidos os dois catetos
O comprimento da hipotenusa pode ser determinado através do Teorema de Pitágoras. Para se determinar a amplitude de cada um dos ângulos agudos usamos uma das razões

trigonométricas.

Exemplo 3



Conhecidos o cateto b=22,6 cm e o cateto c=13,5 cm temos então que:

Cálculo da hipotenusa utilizando o T.Pitágoras:

$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = (22,6)^2 + (13,5)^2 \Leftrightarrow a \simeq 26,33$ cm

Determinação das amplitudes dos dois ângulos agudos:

$$\tan B = \frac{b}{c} \Leftrightarrow \tan B = \frac{22,6}{13,5} \Leftrightarrow B = \tan^{-1}\left(\frac{22,6}{13,5}\right) \Leftrightarrow B \simeq 59^o 8' 54'' C = 90^o - B \Leftrightarrow C = 90^o - \left(59^o 8' 54''\right) = 30^o 51' 6''$$

Resolução de triângulos quaisquer

Relações entre os seus elementos

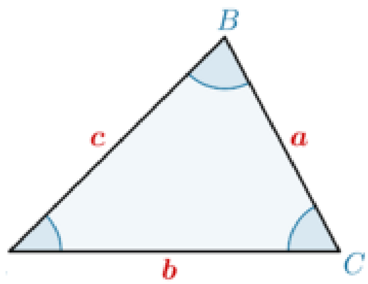


FIGURA 2. Triângulo obliquângulo.

Considerando um triângulo obliquângulo (sem nenhum ângulo reto) [ABC] e designemos por a, b e c os lados desse triângulo e por A, B e C os seus ângulos internos opostos a cada um dos lados, respetivamente (FIGURA 2).

Os seis elementos deste triângulo satisfazem relações importantes, tais como:

$A+B+C=180^o$ (soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo)

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ (Lei dos senos)

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ou $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ ou $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ (Lei dos cossenos)

Resolução de triângulos obliquângulos

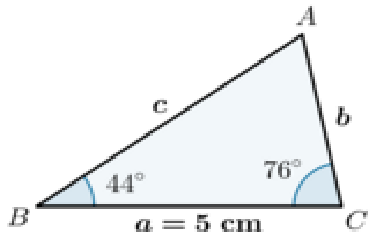
As relações estabelecidas anteriormente permitem resolver um triângulo obliquângulo conhecidos alguns dos seus elementos. Já sabemos que para definir um triângulo precisamos conhecer três dos seus elementos, sendo um deles necessariamente um lado. Assim podemos considerar quatro casos.

1ºcaso - São conhecidos dois ângulos e um lado

Neste caso, para determinar a amplitude do ângulo desconhecido usa-se o facto da soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo ser 180^o. Assim, considerando A o ângulo desconhecido temos que $A=180^o-(B+C)$. Para determinarmos os lados b e c, considerando a conhecido, usamos a lei dos senos. Aplicando esta lei temos então que:

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}\Leftrightarrow b=\frac{a\ \sin b}{\sin A} \text{ e } \frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}\Leftrightarrow c=\frac{a\ \sin C}{\sin A}$$

Exemplo 5



Sabendo que $B=44^o$, $C=76^o$ e que $a=5$ cm temos então que:

Cálculo de A: $A=180^o-(B+C)=180^o-(44^o+76^o)=60^o$.

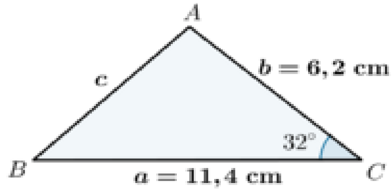
Cálculo de b e c:

$$b=\frac{a\ \sin B}{\sin A}=\frac{5\times\sin 44^o}{\sin 60^o}\simeq 4,01 \text{ e } c=\frac{a\ \sin C}{\sin A}=\frac{5\times\sin 76^o}{\sin 60^o}\simeq 5,6$$

2ºcaso - São conhecidos dois lados e o ângulo por eles formado

Considerando a e b os dois lados conhecidos e C o ângulo conhecido, determinamos o lado c através da lei dos cossenos, $c^2=a^2+b^2-2ab\ \cos C$. Em seguida, através da lei dos senos determinamos $\sin A$ e $\sin B$, $\sin A=\frac{a\ \sin C}{c}$ e $\sin B=\frac{b\ \sin C}{c}$.

Exemplo 6



Conhecidos $a=11,4$ cm, $b=6,2$ cm e $C=32^o$ temos então que:

Cálculo de c:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\ \cos C\Leftrightarrow c^2=(11,4)^2+(6,2)^2-2\times 11,4\times 6,2\times\cos 32^o\Leftrightarrow c\simeq 6,97$$

Cálculo de A e B:

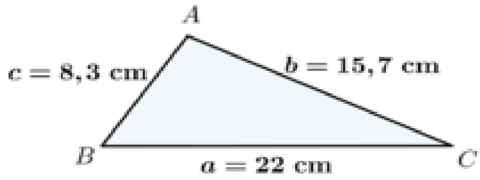
$$\sin A=\frac{a\ \sin C}{c}\Leftrightarrow \sin\ A=\frac{11,4\times \sin 32^o}{6,97}\Leftrightarrow \sin A\simeq 0,87\Leftrightarrow A\simeq 60^o27'36''$$

$$\sin B=\frac{b\ \sin C}{c}\Leftrightarrow \sin\ B=\frac{6,2\times \sin 32^o}{6,97}\Leftrightarrow \sin B\simeq 0,47\Leftrightarrow B\simeq 28^o1'48''$$

3ºcaso - São conhecidos os três lados

Conhecidos os três lados a, b e c utilizamos a lei dos cossenos para determinar cada um dos ângulos internos do triângulo.

Exemplo 7



Sabendo que a=22 cm, b=15,7 cm e c=8,3 cm pela lei dos cossenos temos então que:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\ \cos A\Leftrightarrow 22^2=15,7^2+8,3^2-2\times 15,7\times 8,3\ \cos A\Leftrightarrow \cos A\simeq 0,65\Rightarrow A\simeq 130^o25'48''$$

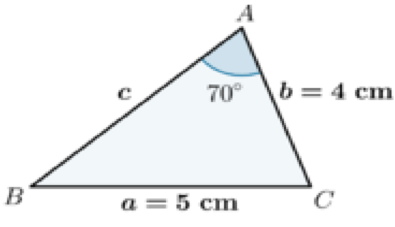
$$b^2=a^2+c^2-2ac\ \cos B\Leftrightarrow 15,7^2=22^2+8,3^2-2\times 22\times 8,3\ \cos B\Leftrightarrow \cos B\simeq 0,84\Rightarrow B\simeq 32^o58'12''$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\ \cos C\Leftrightarrow 8,3^2=22^2+15,7^2-2\times 22\times 15,7\ \cos C\Leftrightarrow \cos C\simeq 0,96\Rightarrow C\simeq 16^o43'12''$$

4ºcaso - São conhecidos dois lados do triângulo e o ângulo oposto a um deles

Suponhamos que são conhecidos os lados a e b e o ângulo A. Utilizamos a lei dos senos para determinar o ângulo B, em seguida, usando o facto da soma dos ângulos internos de um triângulo ser igual a 180^o calculamos a amplitude de C. Por fim, determinamos o terceiro lado do triângulo, lado c, através da lei dos cossenos (como no 2ºcaso).

Exemplo 8



Conhecidos a=10 cm, b=4 cm e A=70º temos então que:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Leftrightarrow \sin B=\frac{4\times \sin 70^o}{10}\Leftrightarrow \sin B\simeq 0,38\Leftrightarrow B\simeq 22,08^o=22^o4'48''$$

$$C = 180^o - (A + B) \Leftrightarrow C = 180^o - (70^o + 22,08^o) \Leftrightarrow C = 87,92^o = 87^o 55' 12''$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos C \Leftrightarrow c^2 = 10^2 + 4^2 - 2 \times 10 \times 4 \times \cos 87,92 \Leftrightarrow c \simeq 10,63$$

REFERÊNCIAS

[1] CALADO, J., *Compêndio de Trigonometria*, 4ªedição, Liv. Popular de Francisco Franco, Lisboa. 1974.