

## As equações de Fresnel.

Eduardo Lage

U. Porto

### CATEGORIA

Artigo

### CITAÇÃO

Lage, E. (2023)

As equações de Fresnel,

*Rev. Ciência Elem.*, V11(03):029.

[doi.org/10.24927/rce2023.029](https://doi.org/10.24927/rce2023.029)

### EDITOR

João Nuno Tavares

Universidade do Porto

### RECEBIDO EM

26 de abril de 2022

### ACEITE EM

14 de junho de 2022

### PUBLICADO EM

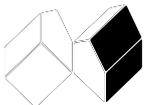
13 de outubro de 2023

### COPYRIGHT

© Casa das Ciências 2023.

Este artigo é de acesso livre, distribuído sob licença Creative Commons com a designação [CC-BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/), que permite a utilização e a partilha para fins não comerciais, desde que citado o autor e a fonte original do artigo.

[rce.casadasciencias.org](https://www.casadasciencias.org)



As leis da ótica geométrica são completamente reproduzidas pelas condições cinemáticas do eletromagnetismo para ondas que incidam sobre uma superfície que divide dois meios distintos. Mas o eletromagnetismo vai mais longe porque fornece expressões bem definidas para as amplitudes relativas das ondas refletida e transmitida – são as equações de Fresnel (1823). Com base nelas, são estudadas a refletância e transmitância para diversos tipos de interfaces separando meios lineares, isotrópicos e não magnéticos, introduz-se o ângulo de Brewster e considera-se a pressão que a radiação exerce sobre um bom condutor.

Quando uma onda eletromagnética incide na superfície plana que separa dois meios diferentes, são originadas uma onda refletida e uma onda transmitida. Para uma onda incidente plana e monocromática, toda a dependência dos seus campos no espaço e no tempo é definida pelo fator:

$$e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad (1)$$

onde  $\vec{k}$  é o vetor de onda e  $\omega$  a frequência angular. As condições de passagem no plano de separação (que se tomará para plano  $xz$ , com o eixo  $y$  perpendicular), são relações lineares entre componentes do campo e determinam que as três ondas têm a mesma frequência e a mesma componente do vetor de onda naquele plano<sup>1</sup>:

$$k_x^{(i)} = k_x^{(r)} = k_x^{(t)} \quad (2)$$

Conhecidas as relações de dispersão<sup>2</sup> em cada meio, ficam completamente determinados os vetores de onda. Em particular, para a onda refletida, propagando-se no mesmo meio da incidente, a equação (2) impõe:

$$k_y^{(r)} = -k_y^{(i)} \quad (3)$$

Isto é, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

Admitir-se-á doravante que o meio onde se propaga a onda incidente é um dielétrico transparente (identificado por meio 1); quanto ao outro meio (meio 2), tanto pode ser outro dielétrico transparente como um condutor. Aceitando que nenhum dos meios é magnético, a relação de dispersão<sup>1</sup> é, genericamente:

$$\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( \epsilon_r + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right) \quad (4)$$

onde  $\varepsilon_r$  e  $\sigma$  são, respectivamente, a permissividade relativa e a condutividade do meio, uma e outra dependentes da frequência.

Os dielétricos são, em geral, isoladores ( $\sigma = 0$ ), o que conduz à identificação do seu índice de refração:

$$\eta = \sqrt{\varepsilon_r} \quad (5)$$

Esta identificação justifica-se porque, para dois dielétricos em presença, a equação (2) origina a lei de Snell (FIGURA 1):

$$\eta_1 \sin \theta_i = \eta_2 \sin \theta_t \quad (6)$$

Para bons condutores ( $\sigma \approx 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$ ) e para frequências óticas ( $\nu \equiv \frac{\omega}{2\pi} \approx 10^{14} s^{-1}$ ) o termo  $\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \sim 10^4$  na equação (4), pelo que pode ignorar-se a permissividade relativa,  $\varepsilon_r \sim 1$ . A onda transmitida é fortemente atenuada.

Neste artigo são deduzidas as relações entre as amplitudes dos campos e discutidas em detalhe as suas consequências para as duas naturezas limite do segundo meio. Estas relações são conhecidas por equações de Fresnel. Recordar-se que as ondas são transversais para meios lineares isotrópicos e que os campos elétrico,  $\vec{E}$ , e magnético,  $\vec{H}$ , satisfazem, genericamente, em cada meio, as seguintes equações:

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \mu_0 \omega \vec{H} \quad (7)$$

$$\vec{k} \wedge \vec{H} = -\omega \varepsilon_0 \left( \varepsilon_r + i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \right) \vec{E} \quad (8)$$

com  $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$  ( $c$  é a velocidade da luz no vácuo).

Na superfície de separação, as relações de passagem, para além das equações (2), exigem a continuidade do campo magnético e da componente tangencial do campo elétrico, mas, como se verá, só há duas independentes.

Seja qual for o estado de polarização da onda incidente, é sempre possível considerar o seu campo elétrico como sobreposição de duas componentes, uma paralela ao plano de incidência e a outra perpendicular. Estes dois casos são tratados separadamente no que se segue.

### Componentes paralelas.

A FIGURA 1 mostra as componentes paralelas do campo elétrico, também se identificando as componentes (perpendiculares) do campo magnético, dirigidas para cá (círculos negros), pelo que são nulas as suas componentes normais à superfície de separação (plano  $xz$ ). Quanto à continuidade das componentes tangenciais do campo magnético, tem-se, pela equação (7):

$$k^{(i)} (E_i + E_r) = k^{(t)} E_t \quad (9)$$

onde:

$$k^{(i)} = \frac{\omega}{c} \eta_1 \quad (10)$$

é a grandeza do vetor de onda comum para as ondas incidente e refletida.

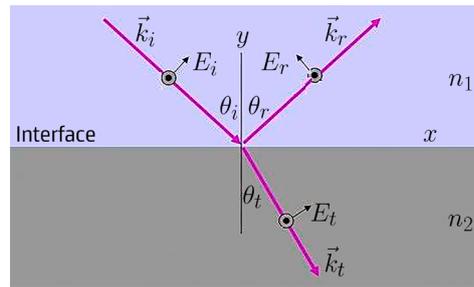


FIGURA 1. Componentes paralelas do campo elétrico.

A continuidade da componente tangencial do campo elétrico dá:

$$(E_i - E_r) \cos \theta_i = E_t \cos \theta_t \quad (11)$$

É óbvio que as componentes normais do deslocamento elétrico,  $\vec{D}$ , são nulas pelo que é nula a densidade superficial de carga livre.

a) Admitindo que o meio 2 é, também, um dielétrico, então:

$$k^{(t)} = \frac{\omega}{c} \eta_2 \quad (12)$$

Assim, das equações (9) e (11) resultam as razões:

$$r_{\parallel} \equiv \frac{E_r}{E_i} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} = \frac{\text{sen}(2\theta_i) - \text{sen}(2\theta_t)}{\text{sen}(2\theta_i) + \text{sen}(2\theta_t)} \quad (13)$$

$$t_{\parallel} \equiv \frac{E_t}{E_i} = \frac{\eta_1 \text{sen} \theta_i \cos \theta_i}{\eta_2 \eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} = \frac{2 \text{sen} \theta_t \cos \theta_i}{\text{sen}(2\theta_i) + \text{sen}(2\theta_t)}$$

Aqui, as últimas expressões obtiveram-se invocando a lei de Snell. Estes resultados são conhecidos por equações de Fresnel para as componentes paralelas.

Para incidência normal, tem-se simplesmente:

$$r_{\parallel} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad t_{\parallel} = \frac{2\eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad (14)$$

Observando a expressão de  $r_{\parallel}$  na equação (13), conclui-se que esta razão se anula quando

$$\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2}.$$

Tal ângulo de incidência é designado por ângulo de Brewster (1815),  $\theta_B$ . Usando a lei de Snell, obtém-se:

$$\text{tg}(\theta_B) = \frac{\eta_2}{\eta_1} \quad (15)$$

Tem-se  $\theta_B \approx 53^\circ$  para a água e  $\theta_B \approx 56^\circ$  para o vidro.

A discussão seguinte distingue os casos  $\eta_1 < \eta_2$  e  $\eta_1 > \eta_2$ .

1. Para  $\eta_1 < \eta_2$ , por exemplo, interface ar ou vácuo ( $\eta = 1$ ) e água ( $\eta = \frac{4}{3}$ ) ou vidro ( $\eta = \frac{3}{2}$ ), a lei de Snell mostra que é sempre  $\theta_t < \theta_i$  pelo que as equações (13) são reais.

2. Para  $\eta_1 > \eta_2$ , por exemplo, trocando os meios anteriores, existe um ângulo (de incidência) limite,  $\theta_L$  para o qual é  $\theta_t = \frac{\pi}{2}$ . Invocando a lei de Snell, tem-se  $\text{sen}(\theta_L) = \frac{\eta_2}{\eta_1}$  (note-se:  $\theta_L > \theta_B$ ).

i) Para  $\theta_i \leq \theta_L$  as equações 13 aplicam-se tal como estão escritas, verificando-se que, no ângulo limite, é  $r_{\parallel} = 1$  e  $t_{\parallel} = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ .

ii) Para  $\theta_i > \theta_L$  a lei de Snell conduz a um ângulo  $\theta_t$  complexo, o que apenas significa que não pode mais ser interpretado geometricamente, apenas havendo necessidade de interpretar os resultados já obtidos. Na verdade, convém lembrar que  $k^{(t)} \cos \theta_t \equiv k_y^{(t)}$  sendo fácil obter esta grandeza através da lei de dispersão:

$$k_y^{(t)} \equiv k^{(t)} \cos \theta_t = \sqrt{k^{(t)2} - (k^{(i)} \text{sen} \theta_i)^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\eta_2^2 - (\eta_1 \text{sen} \theta_i)^2} = -i \frac{\omega}{c} \eta_1 \sqrt{(\text{sen} \theta_i)^2 - (\text{sen} \theta_L)^2}$$

O sinal é escolhido de modo a garantir que a onda transmitida atenua dentro do meio 2 (onde é  $y < 0$ ) como decorre da equação (1). Assim:

$$\cos \theta_t = -i \frac{\eta_1}{\eta_2} \sqrt{(\text{sen} \theta_i)^2 - (\text{sen} \theta_L)^2} = -i \sqrt{\left(\frac{\text{sen} \theta_i}{\text{sen} \theta_L}\right)^2 - 1} \quad (16)$$

A atenuação da onda transmitida não se deve a qualquer processo dissipativo, como se mostrará a seguir. Usando o resultado anterior nas equações (13), conclui-se ser  $|r_{\parallel}| = 1$ .

As amplitudes relativas para as ondas refletida e transmitida estão representadas nas FIGURAS 4 e 6.

b) Considere-se agora o caso de o meio 2 ser um bom condutor onde incide luz visível de modo que  $\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \gg 1$ . Nestas condições, a relação de dispersão para este meio fica:

$$k^{(t)2} \simeq \frac{\omega^2}{c^2} \left( i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right) \rightarrow \frac{k^{(i)}}{|k^{(t)}|} \simeq \frac{\eta_1}{\left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}\right)} \ll 1 \quad (17)$$

Da lei de Snell tira-se:

$$\text{sen} \theta_t = \frac{k^{(i)}}{k^{(t)}} \text{sen} \theta_i \rightarrow \theta_t \simeq \frac{k^{(i)}}{k^{(t)}} \text{sen} \theta_i \quad (18)$$

Deste modo, a componente:

$$\left[ \vec{k}^{(t)} \right]_y = -k^{(t)} \cos \theta_t \simeq -k^{(t)} = -(1+i) \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega \epsilon_0}} \quad (19)$$

onde o sinal da parte imaginária é escolhido para caracterizar o amortecimento da onda transmitida no meio 2 (onde é  $y < 0$ , ver equação 1). Note-se que a amplitude da onda decresce exponencialmente, podendo considerar-se nula para uma distância

$$\delta \sim \frac{c}{\omega} \sqrt{\frac{2\omega \epsilon_0}{\sigma}} \approx \frac{\lambda^{(i)}}{2\pi} \sqrt{\frac{2\omega \epsilon_0}{\sigma}} \ll \lambda^{(i)}, \text{ independente do ângulo de incidência: } \delta \text{ é o com-}$$

primimento de penetração. Este amortecimento é, evidentemente, devido a efeito Joule, sendo da nossa experiência comum sentir um metal quente quando exposto à luz solar. Se o meio 2 for

uma fina lamina do condutor (espessura  $< \delta$ ), a lamina actua como um filtro redutor da luz incidente, um efeito utilizado nas viseiras de astronautas.

Das relações de Fresnel, obtém-se agora:

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &\approx 1 \\ t_{\parallel} &\approx \frac{2k^{(i)}}{k^{(t)}} \end{aligned} \quad (20)$$

A onda refletida transporta, praticamente, toda a energia da onda incidente, como a seguir se mostra.

### Fluxos de energia.

O vetor de Poynting:

$$\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H} \quad (21)$$

determina o fluxo de energia através de qualquer superfície. Interessa aqui considerar apenas o plano ( $y = 0$ ) que separa os dois meios em presença e onde são iguais as fases  $k_x x - \omega t$  para as três ondas. É habitual considerar a média no tempo (sobre um período de oscilação) do vetor de Poynting, de modo que o fluxo incidente, para qualquer dos meios, no plano, é:

$$I = \langle \vec{S} \rangle \cdot (-\vec{e}_y) = -\langle S_y \rangle = -\frac{1}{2} \text{Re} \left[ \vec{E}^* \wedge \vec{H} \right]_y \text{ para } y = 0 \quad (22)$$

No meio 1, o campo é a sobreposição dos campos das ondas incidente e refletida. Contudo, é mostrado no Apêndice 1 que, naquele plano, o fluxo  $I$  é a soma algébrica dos fluxos incidente e refletido, i.e.,

$$I = I_i - I_r \quad (23)$$

com:

$$I_i = -\frac{1}{2} \text{Re} \left[ \vec{E}_i^* \wedge \vec{H}_i \right]_y = -\frac{1}{2\omega\mu_0} \left[ \vec{E}_i^* \wedge \left( \vec{k}^{(i)} \wedge \vec{E}_i \right) \right]_y = \frac{k^{(i)}}{2\omega\mu_0} \left| \vec{E}_i \right|^2 \cos \theta_i \quad (24)$$

$$I_r = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \vec{E}_r^* \wedge \vec{H}_r \right]_y = -\frac{1}{2\omega\mu_0} \text{Re} \left[ \vec{E}_r^* \wedge \left( \vec{k}^{(r)} \wedge \vec{E}_r \right) \right]_y = \frac{k^{(i)}}{2\omega\mu_0} \left| \vec{E}_r \right|^2 \cos \theta_i \quad (25)$$

onde se usou  $\left| \vec{k}^{(i)} \right| = \left| \vec{k}^{(r)} \right|$  e  $\theta_i = \theta_r$ . Define-se o coeficiente de reflexão, ou refletância, por:

$$R_{\parallel} = \frac{I_r}{I_i} = \left| r_{\parallel} \right|^2 \quad (26)$$

com  $r_{\parallel}$  na equação (13), notando-se que este coeficiente se anula no ângulo de Brewster.

Analogamente, para o meio 2, tem-se:

$$\begin{aligned} I_t &= -\frac{1}{2} \text{Re} \left[ \vec{E}_t^* \wedge \vec{H}_t \right]_y = -\frac{1}{2\omega\mu_0} \text{Re} \left[ \vec{E}_t^* \wedge \left( \vec{k}^{(t)} \wedge \vec{E}_t \right) \right]_y \\ &= \frac{1}{2\omega\mu_0} \left| \vec{E}_t \right|^2 \text{Re} \left[ k^{(t)} \cos \theta_t \right] \end{aligned} \quad (27)$$

Define-se o coeficiente de transmissão, ou transmitância, por:

$$T_{\parallel} = \frac{I_t}{I_i} = |t_{\parallel}|^2 \operatorname{Re} \left[ \frac{k^{(t)} \cos \theta_t}{k^{(i)} \cos \theta_i} \right] \quad (28)$$

No Apêndice 2 é demonstrada a conservação genérica da energia na interface, i.e., a energia incidente reparte-se pelas ondas refletida e transmitida:

$$R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1 \quad (29)$$

A) No caso de o segundo meio também ser um dielétrico com  $\eta_2 > \eta_1$ , obtém-se:

$$T_{\parallel} = |t_{\parallel}|^2 \operatorname{Re} \left[ \frac{\eta_2 \cos \theta_t}{\eta_1 \cos \theta_i} \right] \quad (30)$$

Para  $\eta_1 > \eta_2$ , esta expressão mantém-se válida até ao ângulo limite, onde se anula, permanecendo nula para maiores ângulos de incidência para os quais é  $\cos \theta_t$  imaginário puro.

Na FIGURA 5 estão representadas (a vermelho) a refletância e transmitância no caso da interface ar/vidro; na FIGURA 7, estas mesmas grandezas são representadas para a interface vidro/ar.

B) No caso de o segundo meio ser um bom condutor, usando as equações (27) e (19), tem-se:

$$T_{\parallel} \simeq \frac{4}{\eta_1 \cos \theta_i} \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}} \ll 1 \quad (31)$$

Para a prata ( $\sigma = 6,2 \times 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$ ) obtém-se  $R_{\parallel} \sim 95\%$  para luz visível. A FIGURA 2 mostra a refletância de alguns metais (meio 1 é vazio ou ar) em função do comprimento de onda, para incidência normal. O súbito decréscimo da refletância na prata para  $\lambda \simeq 300\text{nm}$  deve-se à existência de um *gap* no espectro eletrónico.

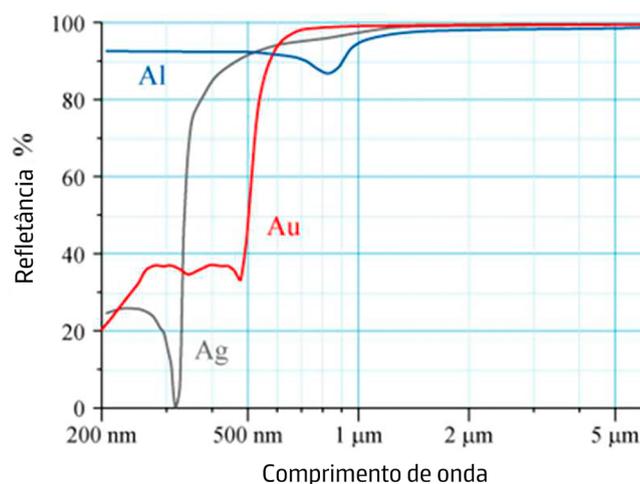


FIGURA 2. Refletância de alguns metais vs comprimento de onda, incidência normal.

### Componentes perpendiculares.

A FIGURA 3 representa o plano de incidência, indicando-se, para as três ondas, as componentes perpendiculares do campo elétrico (pequenos círculos negros) e os respectivos campos magnéticos. Da continuidade das componentes tangenciais do campo elétrico, tira-se:

$$E_i + E_r = E_t \quad (32)$$

Quanto ao campo magnético, a continuidade das suas componentes tangenciais e a equação (7) dão:

$$k^{(i)} (E_i - E_r) \cos \theta_i = k^{(t)} E_t \cos \theta_t \quad (33)$$

A continuidade das componentes normais do campo magnético dá uma identidade quando se usa a lei de Snell.

Das duas equações acima, resulta:

$$r_{\perp} \equiv \frac{E_r}{E_i} = \frac{k^{(i)} \cos \theta_i - k^{(t)} \cos \theta_t}{k^{(i)} \cos \theta_i + k^{(t)} \cos \theta_t} \quad (34)$$

$$t_{\perp} \equiv \frac{E_t}{E_i} = \frac{2k^{(i)} \cos \theta_i}{k^{(i)} \cos \theta_i + k^{(t)} \cos \theta_t}$$

A partir daqui a discussão segue o que se fez para as componentes paralelas, prescindindo-se, assim, de repetições ou pormenores irrelevantes.

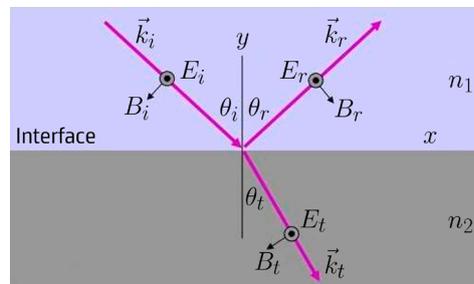


FIGURA 3. Componentes perpendiculares do campo elétrico.

A) Se o meio 2 é, também, um dielétrico, as equações (34) reescrevem-se:

$$r_{\perp} = \frac{\eta_1 \cos \theta_i - \eta_2 \cos \theta_t}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t} = \frac{tg\theta_t - tg\theta_i}{tg\theta_t + tg\theta_i} \quad (35)$$

$$t_{\perp} = \frac{2\eta_1 \cos \theta_i}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t} = \frac{2tg\theta_t}{tg\theta_t + tg\theta_i}$$

tendo-se usado a lei de Snell para obter as últimas expressões. Para incidência normal, tem-se:

$$r_{\perp} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \quad (36)$$

$$t_{\perp} = \frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_2}$$

Comparando com a equação (14), a diferença de sinal nas expressões de  $r_{\perp}$  deve-se unicamente às convenções usadas nas FIGURAS 1 e 3 para medir positivamente os campos elétricos.

De notar que  $r_{\perp}$  nunca se anula. Assim, se a radiação incidente tiver, por exemplo, polarização elíptica, a radiação refletida sairá polarizada rectilaneamente (perpendicular ao plano de incidência) para um ângulo de incidência igual ao ângulo de Brewster.

1. Se  $\eta_2 > \eta_1$ , é sempre  $\theta_t < \theta_i$ , pelo que  $-1 < r_{\perp} < 0$ .
2. Se  $\eta_1 > \eta_2$ , existe o ângulo limite para o qual é  $r_{\perp} = 1$ . Acima deste ângulo,  $r_{\perp}$  e  $t_{\perp}$  são complexos, com  $|r_{\perp}| = 1$ .

A refletância:

$$R_{\perp} = |r_{\perp}|^2 = \left| \frac{tg\theta_t - tg\theta_i}{tg\theta_t + tg\theta_i} \right|^2 \quad (37)$$

cresce com o ângulo de incidência para os dois casos anteriores, atingindo o valor  $\cos^2(2\theta_B)$  no ângulo de Brewster e o valor unitário acima do ângulo limite no caso  $\eta_1 > \eta_2$ .

A transmitância:

$$T_{\perp} = |t_{\perp}|^2 \operatorname{Re} \left[ \frac{k^{(t)} \cos \theta_t}{k^{(i)} \cos \theta_i} \right] \quad (38)$$

obedece, também, à equação (29), anulando-se a partir do ângulo limite no caso  $\eta_1 > \eta_2$ .

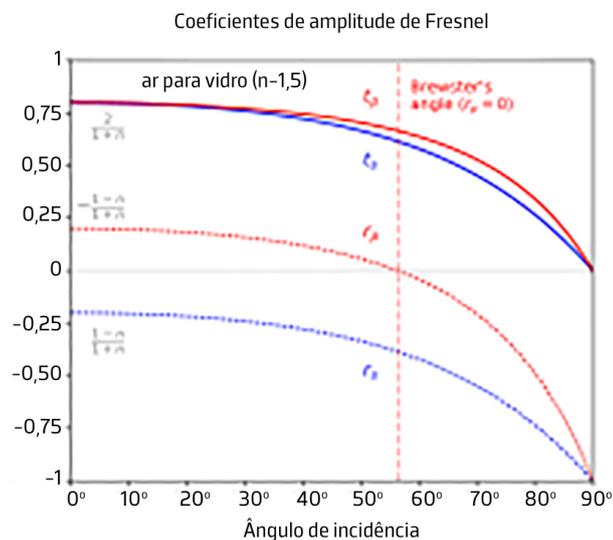


FIGURA 4. Amplitudes de reflexão e transmissão na interface ar/vidro.

A FIGURA 4 representa as amplitudes relativas para a interface ar/vidro: reflexão (tracejado) e transmissão (cheio), vermelho para as componentes paralelas (p) e azul para as componentes perpendiculares (s).

Na FIGURA 5 são representadas a refletância e transmitância para a mesma interface, com a mesma identificação das curvas.

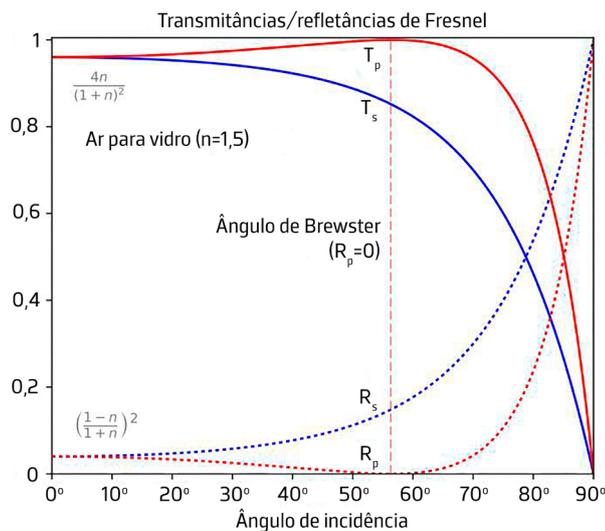


FIGURA 5. Refletâncias e transmitâncias para interface ar/vidro.

A FIGURA 6 exibe as amplitudes para a interface vidro/ar, com a mesma convenção interpretativa.

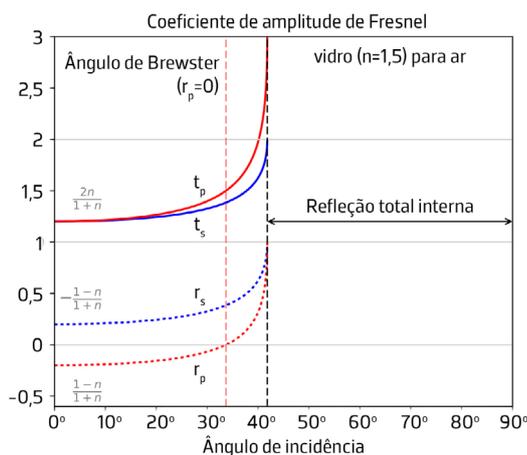


FIGURA 6. Amplitudes para reflexão e transmissão na interface vidro/ar.

Na FIGURA 7 representam-se as refletância e transmitância para a mesma interface.

B) No caso do meio 2 ser um bom condutor,  $\theta_t$  obtém-se da equação (18), sendo  $|\theta_t| \ll 1$ , pelo que as equações (34) ficam:

$$r_{\perp} = \frac{\eta_1 \cos \theta_i - (1+i) \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\epsilon_0}}}{\eta_1 \cos \theta_i + (1+i) \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\epsilon_0}}} \sim -1 \quad t_{\perp} = \frac{2\eta_1 \cos \theta_i}{\eta_1 \cos \theta_i + (1+i) \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\epsilon_0}}} \sim 0 \quad (39)$$

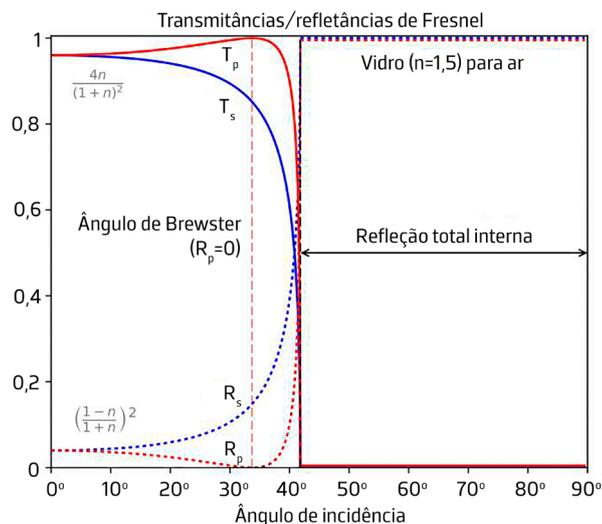


FIGURA 7. Refletâncias e transmitâncias para a interface vidro/ar.

Observe-se que, neste caso, o campo elétrico tem praticamente um nodo na interface com o condutor. A pequena transmitância é da mesma ordem da que se encontrou para a componente paralela, equação (31) e é nula para o perfeito condutor ( $\sigma = \infty$ ). A FIGURA 8 exhibe a refletância para algumas coberturas metálicas em espelhos.

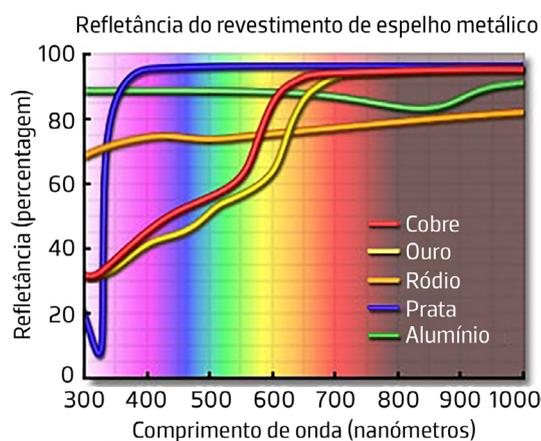


FIGURA 8. Refletâncias de coberturas metálicas.

Tem interesse calcular o momento do campo transferido para o plano separador. Considere-se o meio 1 como ar ou vazio, para simplificar, e o meio 2 condutor. Para incidência normal, o momento transferido em cada segundo, *i.e.*, a pressão exercida é a componente  $\tau_{22}$  do tensor de Maxwell, obtendo-se:

$$\langle \tau_{22} \rangle = \langle u \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{4} \mu_0 \vec{H}^2 = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_i^2 |1 + r_{\perp}|^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_i^2 |1 - r_{\perp}|^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_i^2 (1 + |r_{\perp}|^2)$$

Para bons condutores, tem-se, numa excelente aproximação:

$$\langle \tau_{22} \rangle \approx \varepsilon_0 E_i^2 \quad (40)$$

Este valor é o dobro da pressão para a onda incidente– a pressão é exercida quer por esta onda que atinge a superfície quer pela onda refletida que empurra a superfície.

Para um ângulo de incidência,  $\theta_i$ , genérico a pressão exercida obtém-se da equação (40) multiplicada por  $\cos^2 \theta_i$ .

A refletância da água, na sua fase sólida, é de enorme importância em Geofísica e para o aquecimento global (FIGURA 8).

Designa-se por albedo a percentagem de radiação que uma superfície ou um planeta reflete para o espaço. A figura mostra claramente a diminuição de albedo da Terra com o progressivo desaparecimento de glaciares e gelos polares, um fenómeno que se reforça a si próprio pois quanto menos radiação é refletida tanto mais é retida, originando aumento da temperatura média do planeta.

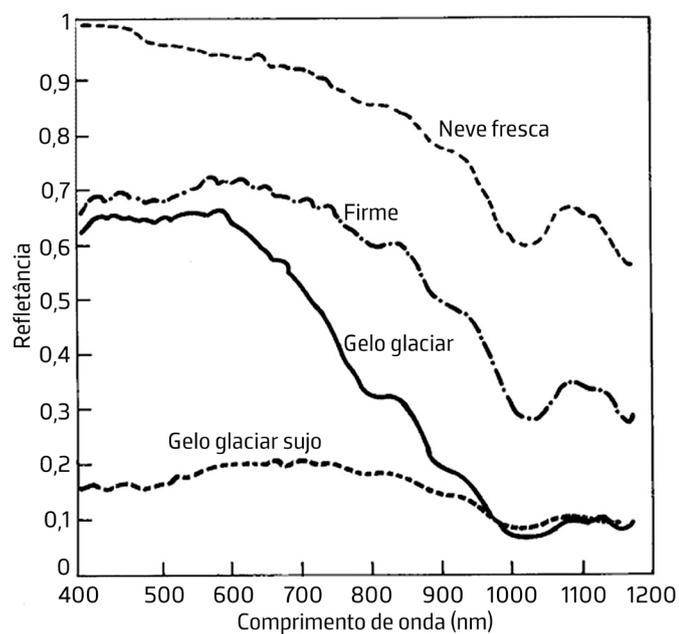


FIGURA 9. Refletâncias da neve e gelo.

## Apêndice 1.

### O fluxo de energia como soma de fluxos na interface.

No meio 1, o campo é a sobreposição dos campos das ondas incidente e refletida, de modo que o vetor de Poynting fica:

$$\begin{aligned} \langle \vec{S} \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \vec{E}^* \wedge \vec{H} \right] = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \left( \vec{E}_i^* + \vec{E}_r^* \right) \wedge \left( \vec{H}_i + \vec{H}_r \right) \right] = \langle \vec{S}_i \rangle + \langle \vec{S}_r \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \vec{E}_r^* \wedge \vec{H}_i + \vec{E}_i^* \wedge \vec{H}_r \right] \end{aligned}$$

Os dois últimos termos representam a interferência das duas ondas. Considerando apenas estes termos e para as componentes paralelas, eliminem-se os campos elétricos usando a equação 8, com  $\sigma = 0$ , para cada onda. Obtém-se:

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[ \vec{E}_r^* \wedge \vec{H}_i + \vec{E}_i^* \wedge \vec{H}_r \right] &= -\frac{1}{\omega \epsilon_0 \eta_1^2} \text{Re} \left[ \left( \vec{k}_r \wedge \vec{H}_r^* \right) \wedge \vec{H}_i + \left( \vec{k}_i \wedge \vec{H}_i^* \right) \wedge \vec{H}_r \right] = \\ &= \frac{1}{\omega \epsilon_0 \eta_1^2} \text{Re} \left[ \vec{H}_r^* \cdot \vec{H}_i \right] \left( \vec{k}_r + \vec{k}_i \right) \end{aligned}$$

onde se usou o facto de os campos magnéticos serem perpendiculares ao plano de incidência. Ora, pretende-se o fluxo de energia no plano de separação, i.e.,  $-\langle \vec{S}_y \rangle$ . A expressão anterior vai contribuir com um termo proporcional a  $(\vec{k}_r + \vec{k}_i)_y = 0$  porque estes vetores de onda têm componentes de sinais opostos em relação à normal ao plano de separação. Deste modo, o fluxo de energia neste plano reduz-se à soma algébrica dos fluxos das ondas incidente e refletida. Para as componentes perpendiculares, eliminam-se os campos magnéticos no termo de interferência, obtendo-se o mesmo resultado.

## Apêndice 2.

### Conservação de energia na interface.

A) Para as componentes paralelas, reescreva-se a equação (22) para cada uma das ondas, sob a forma:

$$\begin{aligned} I_i &= -\frac{1}{2} \text{Re} \left[ \vec{E}_i^* \wedge \vec{H}_i \cdot \vec{e}_y \right] = -\frac{1}{2} \text{Re} \left[ \vec{H}_i \wedge \vec{e}_y \cdot \vec{E}_i^* \right] \\ I_r &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \vec{E}_r^* \wedge \vec{H}_r \cdot \vec{e}_y \right] = -\frac{1}{2} \text{Re} \left[ \vec{H}_r \wedge \vec{e}_y \cdot \vec{E}_r^* \right] \\ I_t &= -\frac{1}{2} \text{Re} \left[ \vec{E}_t^* \wedge \vec{H}_t \cdot \vec{e}_y \right] = -\frac{1}{2} \text{Re} \left[ \vec{H}_t \wedge \vec{e}_y \cdot \vec{E}_t^* \right] \end{aligned}$$

onde  $\vec{e}_y$  é o versor da normal ao plano de separação. A continuidade do campo magnético,  $\vec{H}_i + \vec{H}_r = \vec{H}_t$  permite eliminar o campo  $\vec{H}_t$  para se obter:

$$I_i - I_r - I_t = -\frac{1}{2} \text{Re} \left[ \vec{H}_i \wedge \vec{e}_y \cdot \left( \vec{E}_i^* - \vec{E}_r^* - \vec{E}_t^* \right) \right]$$

Ora, o campo magnético é, para estas componentes, perpendicular ao plano de incidência (i.e., alinhado segundo  $z$ ), pelo que  $\vec{H} \wedge \vec{e}_y = -H\vec{e}_x$  para cada uma das ondas acima. Assim:

$$I_i - I_r - I_t = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ H_i \left( \vec{E}_i^* - \vec{E}_t^* \right)_x + H_r \left( \vec{E}_r^* - \vec{E}_t^* \right)_x \right]$$

Ora as componentes tangenciais (i.e., segundo  $x$ ) do campo elétrico são contínuas, pelo que (FIGURA 1):

$$I_i - I_r - I_t = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ H_i \left( \vec{E}_r^* \right)_x + H_r \left( \vec{E}_i^* \right)_x \right] = \frac{1}{2} \text{Re} [H_i E_r^* - H_r E_i^*] \cos \theta_i$$

Mas para a onda incidente tem-se  $H_i = \frac{k^{(i)} E_i}{\omega \mu_0}$  e, do mesmo modo, para a onda refletida.

Assim:

$$I_i - I_r - I_t = \frac{k^{(i)}}{2\omega \mu_0} \text{Re} [E_i E_r^* - E_r E_i^*] \cos \theta_i = 0$$

B) Para as componentes perpendiculares, o raciocínio é semelhante ao anterior. Tem-se:

$$I_i - I_r - I_t = -\frac{1}{2} \text{Re} \left[ \vec{E}_i^* \wedge \vec{H}_i + \vec{E}_r^* \wedge \vec{H}_r - \vec{E}_t^* \wedge \vec{H}_t \right] \cdot \vec{e}_y$$

O campo magnético, contínuo através do plano de separação, permite escrever:

$$\begin{aligned} I_i - I_r - I_t &= -\frac{1}{2} \text{Re} \left[ \left( \vec{E}_i^* - \vec{E}_t^* \right) \wedge \vec{H}_i \cdot \vec{e}_y + \left( \vec{E}_r^* - \vec{E}_t^* \right) \wedge \vec{H}_r \cdot \vec{e}_y \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \text{Re} \left[ \vec{e}_y \wedge \left( \vec{E}_i^* - \vec{E}_t^* \right) \cdot \vec{H}_i + \vec{e}_y \wedge \left( \vec{E}_r^* - \vec{E}_t^* \right) \cdot \vec{H}_r \right] \end{aligned}$$

Para estas componentes, os campos elétricos têm a direcção  $z$ , de modo que:

$$\begin{aligned} I_i - I_r - I_t &= -\frac{1}{2} \text{Re} \left[ (E_i^* - E_t^*) (\vec{H}_i)_x + (E_r^* - E_t^*) (\vec{H}_r)_x \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \text{Re} [E_r^* H_i - E_i^* H_r] \cos \theta_i \end{aligned}$$

O penúltimo termo resulta da continuidade das componentes tangenciais do campo eléctrico; para o último termo, ver FIGURA 3. Ora, para as ondas incidente e refletida, é  $H = \frac{k^{(i)}}{\omega \mu_0} E$ , obtendo-se, finalmente:

$$I_i - I_r - I_t = -\frac{k^{(i)}}{2\omega\mu_0} \text{Re} [E_r^* E_i - E_r E_i^*] \cos \theta_i = 0$$

## REFERÊNCIAS

<sup>1</sup> LAGE, E., *Ondas eletromagnéticas*, Rev. Ciência Elem., V11(2):027. (2023). DOI: [10.24927/rce2023.027](https://doi.org/10.24927/rce2023.027).

<sup>2</sup> LAGE, E., *Ondas*, Rev. Ciência Elem., V8(1):016. (2020). DOI: [10.24927/rce2020.016](https://doi.org/10.24927/rce2020.016).